

Problemas kuhnianos, revoluções científicas e a história da matemática

Leo Corry

The Cohn Institute for the History and Philosophy of Science

Traduzido por Marcelo Papini

O relato por Kuhn do desenvolvimento da ciência, juntamente com os conceitos associados de paradigma, de ciência normal e de revoluções científicas, tem constituído o foco de controvérsias profundas desde que foram primeiramente publicadas em 1962 ⁽¹⁾. Problemas subsidiários a essa disputa são a aplicabilidade da teoria de Kuhn à história de disciplinas científicas individuais; especialmente se tem discutido o quesito da existência de revoluções científicas nessas disciplinas. Tais discussões são frequentemente precedidas de considerações preliminares acerca da definição adequada de 'revolução científica'; escolhida uma tal definição, podemos provar tanto que ocorreram quanto que não ocorreram revoluções em um dado campo. Assim, as discussões têm permanecido no nível semântico. Mesmo que devamos respeitar a liberdade semântica dos autores em escolher seus próprios significados para o termo 'revolução científica', podemos tratar criticamente as diversas definições e estimar-lhes o grau de interesse e de fecundidade como instrumentos analíticos de pesquisa na história da ciência.

Neste artigo, persigo uma tarefa dupla. Primeiramente, proponho um modelo para estimar de novo as várias interpretações da teoria de Kuhn e para lhes avaliar o interesse e a fecundidade relativos na descrição do desenvolvimento histórico da ciência. Em seguida, discuto a aplicabilidade ao caso particular da história da matemática das versões relativamente mais interessantes de Kuhn. Assim, ao invés de discutir se se pode propor uma definição de revoluções científicas tal, que se conclua pela ocorrência de revoluções em matemática, indago se a análise da história da matemática em termos kuhnianos conduz a novos discernimentos que, de outra forma, não seriam percebidos pelos historiadores e pelos filósofos da matemática.

1. Introdução

Disputas concernentes à teoria de Kuhn frequentemente se dedicam a dois temas distintos: de um lado, *o signifi-*

cado verdadeiro da teoria de Kuhn e de seus conceitos associados; do outro lado, a sua aplicabilidade à história da ciência em geral e à história de disciplinas científicas particulares. Uma dificuldade típica encontrada na tentativa de elucidar o significado da teoria reside nas várias mudanças que as próprias opiniões de Kuhn sofreram no curso de seus escritos sucessivos. O caráter controverso do livro de Kuhn procede do fato de que na maior parte dos temas implicados, senão em todos, Kuhn adotou inicialmente uma posição rígida e inflexível. Mais tarde, nas tentativas de explicar mais amplamente sua posição e, talvez, sob a pressão de censuras severas, Kuhn pareceu desejar, cada vez mais, defender versões atenuadas de suas opiniões iniciais. Assim, suas concepções se tornaram mais aceitáveis, porém, infelizmente, muito menos audazes e, por isso, muito menos interessantes.

Contudo, além das apreciações pessoais dos méritos das verdadeiras opiniões de Kuhn, existe pelo menos uma virtude inegável que se deve reconhecer em seu trabalho: a de haver provocado a adoção amplamente difundida de uma nova agenda para a discussão na história e na filosofia da ciência (como também em muitas outras esferas intelectuais). Não que todos os temas contemplados nessa agenda fossem criação direta de Kuhn; vários dentre eles tinham sido discutidos separadamente, antes de Kuhn, por outros autores que tentavam propor uma visão não positivista da ciência. Todavia, nenhum outro livro sozinho foi tão útil quanto *A Estrutura das Revoluções Científicas* em tornar essa agenda uma preocupação central para historiadores e filósofos da ciência. Doravante, referir-me-ei a essa agenda como "a agenda kuhniana".

Os problemas principais considerados na agenda kuhniana podem articular-se em torno de quatro eixos:

1. Mudança normal versus mudança revolucionária.
2. Paradigmas.
3. Racionalidade da ciência.
4. A comunidade científica.

O próprio Kuhn, bem como os seus adeptos e os seus críticos, frequentemente trataram os temas associados aos diversos eixos sem os separar claramente; essa tem sido a fonte de uma segunda dificuldade típica na discussão da

teoria de Kuhn e de sua aplicabilidade. A fim de dominar essa dificuldade, fornecerei uma lista exaustiva dos temas que surgem no contexto de cada um dos eixos citados; sustentarei que esses temas são logicamente independentes, isto é, que se pode adotar uma posição diante de cada um dos temas independentemente da posição adotada perante qualquer outro. Combinando-se as diferentes posições assumidas diante dos vários temas da agenda kuhniana, produzem-se vários relatos kuhnianos distintos da história da ciência.

Os temas associados aos quatro eixos referidos admitem formulações extremas e inflexíveis. Surgem as diversas versões kuhnianas, quando essas formulações são adotadas com graus variados de compromisso. As versões da teoria propostas sucessivamente por Kuhn indicam como esses diversos graus de compromisso se traduzem em diversos graus de audácia, por um lado, e de aceitabilidade, pelo outro lado, do relato kuhniano da história da ciência. Porém, o que nos interessa aqui não é um relato crítico da evolução das próprias idéias de Kuhn mas, antes, uma avaliação das perspectivas descortinadas pela agenda kuhniana. Assim, o grau relativo de interesse de uma versão particular do relato kuhniano será determinado por seu compromisso com cada uma das formulações propostas; quanto mais comprometido [com a tese kuhniana] estiver um relato, tanto mais afastado ele estará da concepção positivista da ciência e, portanto, tanto mais audaz e interessante ele será. Obviamente, a veracidade de alguma versão da opinião de Kuhn constitui um quesito completamente diferente.

1. Mudança normal versus mudança revolucionária

Esse é o eixo central da agenda kuhniana. A versão original da teoria de Kuhn pretendia instituir a existência de mudanças revolucionárias e explicar como e quando ocorrem. Ela associava revoluções com paradigmas, permitia fatores irracionais em relatos do desenvolvimento da ciência e atribuía um papel cognitivo à comunidade científica. Pelo menos, muitas pessoas assim entendiam a teoria de Kuhn. Podemos contudo considerar separadamente cada um desses temas.

A mudança normal é a mudança por acúmulo linear, com, quando muito, uma rejeição mínima do conhecimento existente. A principal atividade dos cientistas comprometidos com a pesquisa normal é 'resolver problemas', isto é, tentar conectar um dado problema com o *corpus* existente do

conhecimento científico aceito. As dificuldades encontradas nessas tentativas desafiam a habilidade individual do cientista; elas não suscitam dúvidas acerca da validade da teoria como tal.

Na mudança revolucionária, a passagem do antigo para o novo não se opera pela simples adição ao conhecimento anterior. O *corpus* do conhecimento admitido após a mudança revolucionária é *incompatível* com o *corpus* aceito antes da revolução; isso significa que não podem ambos ser considerados simultaneamente verdadeiros. Portanto, quando ocorre a mudança revolucionária, componentes essenciais do conhecimento anteriormente admitido devem ser recusados. Em sua primeira versão, Kuhn chegou a afirmar que teorias pré-revolucionárias e teorias pós-revolucionárias são *incomensuráveis*.

A posição mais audaz relativa às mudanças normal e revolucionária é formulada com os assertos seguintes:

- 1.1 Existem na ciência fatos que se descrevem como mudança puramente normal e mudança puramente revolucionária.
- 1.2 A história da ciência consiste em longas fases de ciência normal esporadicamente interrompidas por mudança revolucionária.
- 1.3 A linguagem usada em um campo científico muda tão radicalmente durante as revoluções nesse campo, que a linguagem antiga e a linguagem nova não se traduzem uma na outra.
- 1.4 Uma revolução científica é 'um evento relativamente súbito e não estruturado, semelhante a uma comutação perceptiva'⁽³⁾. Constitui um processo total, que não se pode efetuar 'gradativamente, cada passo na sua vez'⁽⁴⁾.
- 1.5 A distinção entre mudança revolucionária e mudança normal não é equivalente à diferença entre 'ruptura primária' e 'descobrimento secundário'.

O asserto (1.5) não aparece explicitamente nos escritos de Kuhn. Todavia, eu o introduzi aqui para acentuar que ao termo 'mudança revolucionária' não se deve atribuir julgamento de valor. Se na agenda kuhniana nada houvesse além dos rótulos de ciência boa e ciência má, ela não

ofereceria novas perspectivas para historiadores e filósofos da ciência. A fim de ser interessante e, de fato, significativa, a definição de ciência revolucionária deve considerar a existência de rupturas primárias como parte da mudança normal.

2. *Paradigmas*

Esse termo vago e seus diversos sinônimos foram usados para denotar teorias completas, casos exemplares de aquisição científica no passado, modelos, concepções metafísicas, escolha de problemas e técnicas para analisá-los e muitas outras coisas. Se 'paradigma' for sinônimo de 'teoria', então não será necessário discutir separadamente o primeiro conceito. Paradigmas tornam-se significativos, quando são considerados quer como idéias isoladas quer como sistemas conceituais completos, distintos de particulares teorias científicas que, contudo, devem ser referidas na explicação do desenvolvimento da ciência. Definições de 'paradigmas' devem considerar tanto a sua adoção consciente por cientistas quanto a sua ulterior revelação pelo historiador. Todavia, em qualquer caso, paradigmas devem ter um comportamento próprio na história, o qual é diferente do comportamento de teorias (e, por preferência, tem prioridade conceitual sobre o comportamento delas). Se assim não fosse, paradigmas seriam redundantes como instrumento analítico para o historiador e o filósofo da ciência. Nesse esquema, podem formular-se diversas definições mais elaboradas de 'paradigma'. Com respeito a qualquer definição desse tipo, a inflexível versão kuhniana defende que:

2.1 As unidades básicas da aquisição e da mudança científicas são os paradigmas e não as teorias (e, certamente, não os descobrimentos individuais).

2.2 Enquanto estiver sob a influência de um paradigma, um cientista não poderá acolher seriamente um paradigma rival ⁽⁵⁾.

O relato de Kuhn tem sido criticado freqüentemente por envolver um círculo vicioso, pois supostamente define uma comunidade científica como qualquer grupo que partilha um paradigma e conceitua um paradigma como aquilo que é partilhado por uma comunidade científica. Quer isso ocorra ou não nos escritos de Kuhn, os dois temas são separados na agenda kuhniana. Pode afirmar-se um papel para paradigmas, mais ou menos comprometido com os assertos (2.1) e (2.2),

sem referir como se escolhe um paradigma. Particularmente, pode afirmar-se que uma comunidade seja ou não seja determinante nessa decisão ⁽⁶⁾.

3. Racionalidade da ciência

Relatos positivistas da ciência aceitam por certa a sua racionalidade. Relatos não-positivistas enfrentam o problema da racionalidade. Popper tratou essa questão, defendendo que racionalidade da ciência reside em seu compromisso com a disputa crítica. Nos escritos de Kuhn, o quesito da racionalidade surge em conexão com paradigmas e com a escolha de teorias. Uma das fontes de controvérsia acerca da primeira versão de Kuhn era a conclusão de que a aceitação de um novo paradigma não é uma simples questão de aplicar regras. Porém esse quesito, assim como os dois anteriores, é de fato um problema separado que pode ser considerado em si mesmo. O problema da racionalidade ocorre na agenda kuhniana como graus diversos de compromisso com os dois assertos seguintes:

3.1 A discussão racional é possível somente após o acordo acerca de princípios fundamentais e esse acordo é exatamente uma questão de convenção ⁽⁷⁾.

3.2 Muitas dentre as escolhas dos cientistas não obedecem a leis universalmente válidas; mais que isso, essas escolhas admitem apenas explicações sociológicas e psicológicas.

4. A comunidade científica

A tarefa tradicional da sociologia da ciência, desde Merton, tem sido compor um relato das condições sob as quais a comunidade de cientistas pode efetivamente evoluir. Os sociólogos têm aceito implicitamente 'uma divisão do trabalho' com os historiadores e os filósofos da ciência. Os sociólogos estudariam o comportamento não-lógico da comunidade científica, enquanto historiadores e filósofos estudariam o conteúdo e a lógica interna das idéias dos cientistas; a primeira tarefa foi considerada irrelevante à última ⁽⁸⁾. Kuhn trouxe uma contribuição perceptível à sociologia da ciência, ao sugerir que, de fato, tal premissa fosse falsa. Assim como em outras questões, Kuhn originalmente adotou uma opinião extrema a esse respeito, contribuindo para tornar controverso o seu livro. Mais tarde, novamente sob a pressão das críticas, ele atenuou sua posição ⁽⁹⁾.

A opinião inflexível de que a estrutura e o comportamento da comunidade científica são um fator instrumental na conformação do conteúdo e da lógica da ciência é expressa nos três assertos seguintes:

- 4.1 Pode ser elaborada uma caracterização sociológica distintiva das comunidades científicas, a qual é exclusiva, isto é, não é válida para outro qualquer tipo de comunidade profissional.
- 4.2 O estudo sociológico desse tipo de comunidade é *epistemologicamente* relevante à compreensão dos conteúdos cognitivos da ciência. Em particular, a última instância da autoridade racional da ciência é a comunidade científica ⁽¹⁰⁾.
- 4.3 A comunidade científica relevante à análise epistemológica é a comunidade dos praticantes de uma disciplina completa (como a física e a biologia) e não os praticantes de subdisciplinas (como biologia molecular, evolução ou zoologia marinha).

Embora não figure explicitamente no escrito de Kuhn, o asserto (4.1) é necessário para atribuir um significado mais claro ao asserto (4.2) ⁽¹¹⁾. Note-se também que podemos declarar que a comunidade influi sobre os conteúdos da ciência através dos paradigmas, mas existem também muitas outras declarações possíveis; assim, paradigmas e comunidade científica são dois temas separados na agenda kuhniana.

Ao responder aos seus críticos, Kuhn defendeu que sua definição de 'comunidades científicas' considera igualmente comunidades grandes e muito pequenas, incluindo mesmo 'menos que vinte e cinco pessoas' ⁽¹²⁾. Obviamente, essa é uma forma mitigada de sua afirmativa inicial; assim, por exemplo, um dos aspectos da ciência como sistema cognitivo, o qual se tenta explicar mediante um relato social da ciência, é o grau relativamente alto de acordo encontrado, como norma, entre os membros da comunidade. Naturalmente, quanto menor for a comunidade incluída nessa explicação, tanto mais fraco será o poder dessa afirmativa. Essa é a razão para inserir o asserto (4.3).

Assim, a agenda kuhniana, ao descrever a história da ciência, fornece quatro eixos de referência. Obtém-se uma versão radical da teoria de Kuhn pela adoção inteiramente comprometida das formulações anteriores. A análise da

história da ciência nesses termos, desde que se mostre adequada, certamente fornecerá ao historiador muitas novas percepções. Contudo, muito provavelmente, a maior parte das afirmativas anteriores revelar-se-á historicamente inadequada, a menos que abandonemos a formulação extrema em favor de uma proposição mais moderada. Quanto mais tivermos que abandonar as formulações extremas, a fim de adequá-las aos fatos históricos, tanto menor será o interesse oferecido pela teoria como instrumento analítico. Dado um relato particular de mudança científica, que refira os temas kuhnianos, podemos agora estimar sua fecundidade; isto é, podemos estimar se, olhando a história da ciência através desse relato, haverá expectativa de percepções significativas que não seriam obtidas de outra forma ou se, pelo contrário, esse relato oferece apenas um sistema de qualificação — como 'importante' ou 'rotineira' — das diversas fases no desenvolvimento da disciplina vertente.

Portanto, o exame anterior da teoria de Kuhn permite um entendimento mais claro tanto de seus assertos positivos quanto dos negativos e, conseqüentemente, a possibilidade de uma estimativa mais equilibrada de sua real contribuição à história e à filosofia da ciência.

2. Discutindo revoluções na matemática: um estudo de caso.

Joseph Dauben ⁽¹³⁾ aventou uma tentativa articulada de analisar a história da matemática em termos kuhnianos. Em um artigo de 1984, ele oferece sua própria definição de revolução em ciência, a fim de defender que, admitida essa definição, tanto o descobrimento de grandezas incommensuráveis na Grécia antiga quanto a teoria dos conjuntos de Cantor são revoluções ⁽¹⁴⁾. Efetivamente, a definição de Dauben não se pretende uma reformulação nem uma adaptação da definição de Kuhn. Com efeito, é provável que Dauben recusasse qualquer conexão entre a sua análise e a teoria de Kuhn. Contudo, como foi sugerido na seção anterior, a contribuição específica de qualquer tentativa em falar de mudança revolucionária na ciência, em oposição a mudança normal, pode ser avaliada por referência à agenda kuhniana.

A definição de revolução de Dauben apóia-se em idéias anteriormente desenvolvidas por I. Bernard Cohen em sua própria obra ⁽¹⁵⁾. A fim de elucidar o significado de 'revolução', Dauben sugere acompanhar o exame por Cohen do sig-

nificado que, (no contexto político,) tradicionalmente tem sido atribuído a esse termo, desde o século XVIII. Tal exame conduz Dauben a especificar os seguintes aspectos característicos de revoluções:

- a. Uma mudança radical ou um afastamento dos modos de pensar tradicionais ou aceitáveis.
- b. Uma série de descontinuidades de tal magnitude que constitua uma ruptura definida com o passado. Após tais episódios, poderíamos dizer que já não é possível voltar à antiga ordem.
- c. Revoluções tem sido aqueles episódios da história nos quais a autoridade de um sistema antigo e aceito foi debilitada e uma autoridade nova e melhor a substitui⁽¹⁶⁾.

Segundo essa definição, sustenta Dauben, ocorreram revoluções na matemática. Certamente, a natureza característica da matemática não é ignorada por Dauben, que não enxerga razões 'para esperar que uma disciplina puramente lógico-dedutiva como a matemática deva sofrer o mesmo tipo de transformações ou de revoluções que a ciência natural' e, em particular, que deva sujeitar-se ao esquema do 'modelo de anomalia-crise-revolução do prof. Kuhn'⁽¹⁷⁾. Portanto, quando se fala de revoluções na matemática, devem acrescentar-se alguns requisitos:

- d. [Em matemática] nem sempre a antiga ordem é refutada ou recusada.
- e. Frequentemente, é claro que novas idéias não teriam sido admitidas no contexto de uma interpretação estritamente construída da velha matemática, ainda que a nova matemática consiga acomodar os antigos inventos de um modo compatível ou consistente.
- f. Frequentemente, muitos dos teoremas e inventos da matemática mais antiga são relegados a uma posição bem menos importante, como resultado de revoluções conceituais que conferem proeminência a uma teoria ou a uma disciplina matemática inteiramente nova⁽¹⁸⁾.

Conforme sustentamos acima, não é tão importante que uma definição de 'revolução científica' se coadune ao 'modelo kuhniano' (se é que tal coisa existe); o que importa é a possibilidade de uma definição particular conduzir a novas percepções no estudo da história da matemática. Assim, a

agenda kuhniana acima descrita fornece parâmetros úteis para estimar o interesse relativo da definição particular de Dauben. Note-se, antes de tudo, que a definição explícita de Dauben não trata absolutamente das questões associadas aos temas (2), (3) e (4) anteriores. A descrição por Dauben de revoluções e sua assertiva de que as há na história da matemática implicam a aceitação de algumas versões dos assertos (1.1) e (1.2); ele afirma que, na história da matemática, houve certos eventos de significado especial, que se podem distinguir do progresso cotidiano na pesquisa matemática. Além disso, talvez a sentença (e) de Dauben possa considerar-se uma versão enfraquecida do asserto (1.3). Certamente, a sentença (d) de Dauben atenua seu compromisso tanto com a assertiva (1.3) quanto com a distinção entre ciência normal e ciência revolucionária.

Além das afirmativas explícitas de Dauben, encontramos referência implícita aos outros temas de agenda kuhniana em sua análise dos dois exemplos escolhidos como representantes de revoluções em matemática. Dentre as principais influências revolucionárias do descobrimento das grandezas incomensuráveis, Dauben refere a conseqüente admissão dos números irracionais, nos termos seguintes:

A transformação na conceituação de grandezas irracionais em números irracionais representa uma revolução em si mesma no conceito de número, embora essa não tenha sido uma transformação concluída pelos gregos. Nem foi isso uma sublevação de poucos anos, como ocorre na maior parte das revoluções políticas, porém uma mudança básica e fundamental. Ainda que a revolução tenha sido relativamente lenta, isso não modifica o efeito último da transformação. Embora fosse conservado o vocábulo, o velho conceito de número terminou e, em seu lugar, o novo conceito incluiria também os números irracionais. ⁽¹⁹⁾

Essa citação, bem como outras passagens semelhantes no ensaio, ilustra os aspectos problemáticos das revoluções de Dauben como categoria para análise histórica. A posição descomprometida de Dauben acerca do asserto (1.4) suscita quesitos como: que é tão característico nesse longo episódio da história da matemática, que justifique sua separação de outros episódios, não menos importantes? Quais conceitos básicos da matemática mudaram menos significativamente durante os últimos dois milênios da história da matemática ⁽²⁰⁾?

De todos os temas da agenda kuhniana, apenas se pode encontrar na definição de Dauben a separação entre a mudança

revolucionária e a mudança normal e mesmo essa não é formulada claramente. A caracterização por Dauben, sobretudo, não fornece explicitamente os meios para se identificarem, entre outras contribuições à matemática, as verdadeiramente revolucionárias; os exemplos particulares escolhidos por Dauben tornam as coisas ainda mais confusas. Dauben defende que, após o descobrimento das grandezas incomensuráveis, duas coisas se tornaram inaceitáveis: '(1) a interpretação pitagórica da razão; e (2) as provas que haviam oferecido, concernentes a grandezas comensuráveis, começaram a desempenhar seu papel [sic].' Além disso, ele acrescenta, 'novas provas substituíram provas antigas' ⁽²¹⁾. Dauben justifica sua assertiva, citando provas que aparecem no Livro V dos *Elementos* de Euclides, as quais estendem provas dos Livros II e VII. Assim, a afirmativa de Dauben não significa, como poderia parecer a primeira vista, que provas antigas tenham sido *rejeitadas como errôneas*; ao invés disso, significa justamente que provas antigas foram substituídas por versões aperfeiçoadas e mais gerais. Dauben reconhece que assim ocorreu mas defende que:

Dizer que a matemática cresce mediante a acumulação sucessiva de conhecimento, e não mediante o deslocamento da teoria desacreditada por nova teoria, não é a mesma coisa que negar avanços revolucionários. ⁽²²⁾

Então, o que caracteriza os progressos revolucionários? A resposta pareceria encontrar-se no segundo exemplo de mudança revolucionária proposto por Dauben. De fato, Dauben sustenta que o trabalho de Cantor:

... não substitui mas *efetivamente* aumenta a capacidade da teoria anterior de um modo revolucionário — o que de outra forma seria impossível. Era revolucionário em romper os vínculos e as limitações da antiga análise, do mesmo modo que os números imaginários e complexos conduziram a matemática a novos níveis de generalidade e tornaram possíveis soluções que, de outra forma, não se poderiam formular. ⁽²³⁾

Se é isso que caracteriza a mudança revolucionária, em oposição à mudança normal, então poderemos indagar: a formulação de qualquer teoria que permita perspectivas mais amplas, fornecendo exposições mais gerais ou conduzindo a soluções insuspeitadas de problemas até então insolúveis constitui uma mudança revolucionária? Se for esse o caso, seremos levados a concluir que, para Dauben, 'mudança revolucionária' é a mesma coisa que 'ruptura primária' ⁽²⁴⁾. Indubitavelmente, embora estimar o significado relativo de

várias contribuições ao desenvolvimento da disciplina se encontre entre as tarefas importantes do historiador da matemática, podemos perguntar-nos se tal empreendimento exige ou mesmo se justifica a introdução de um conceito adicional e supérfluo de 'revolução'. Em todo caso, o conceito de revolução aventado por Dauben não assume qualquer dos riscos implicados por algum grau de compromisso com a agenda kuhniana nem considera o desfrute de qualquer dos ganhos esperados.

De fato, existe um único tema que, embora não seja citado explicitamente por Dauben, pode ser lido entre as linhas de seu argumento e que confere algum grau de interesse em sua análise. Está conectado ao asserto (4.3) (ainda que não reconheça qualquer papel epistemológico à comunidade científica). Dauben parece inferir que os dois exemplos considerados em seu ensaio influenciaram o desenvolvimento subsequente de *toda a disciplina matemática* e não somente do contexto limitado e específico no qual surgiram. Assim, em sua discussão do descobrimento da incomensurabilidade, Dauben afirma que:

Inteiramente separada da transformação mais lenta e mais sutil do conceito de número, contudo, foi a transformação, dramática e mais rápida, do caráter da própria matemática grega ... A matemática grega foi diretamente transformada em alguma coisa mais poderosa, mais geral e mais completa. ⁽²⁵⁾

Embora, mais uma vez, a última sentença implique que, para Dauben, o termo 'mudança revolucionária' encerre, acima de tudo, um valor de julgamento, sua estimativa também inclui a declaração independente da influência total do descobrimento. Do mesmo modo, no que toca à teoria de Cantor, Dauben indica como seus sintomas revolucionários:

... a revisão extensa, atribuível à teoria transfinita dos conjuntos, de grandes partes da matemática, envolvendo a reescrita de livros didáticos e precipitando discussões sobre os fundamentos. ⁽²⁶⁾

'Influência total na disciplina': embora todo desenvolvimento que satisfaça a esse critério seja talvez também uma 'ruptura primária', o oposto certamente não se verifica. Existem muitas rupturas primárias cuja influência permanece confinada a um contexto mais restrito que toda a disciplina. Esse pareceria ser o único critério aceitável e significativo, decorrente do relato de Dauben, para considerar revolucionário um exemplo de mudança, sem ter de subordinar a ele todo exemplo de 'ruptura notável'. Certa-

mente, continua aberta a questão da conformidade dos dois exemplos de Dauben a esse critério, porém essa é uma questão diferente que não será discutida aqui ⁽²⁷⁾.

3. O corpo da matemática e as imagens da matemática

Poder-se-á, contudo, encontrar uma definição audaz e significativa de 'revolução' (isto é, uma definição que considere tantos temas da agenda kuhniana quanto for possível) que admita revoluções na matemática e que conduza a novas percepções históricas significativas? A fim de discutir esse quesito, devo inicialmente tecer algumas considerações gerais sobre a história da matemática.

Qualquer disciplina científica provoca dois tipos de questões: (1) questões substantivas da disciplina e (2) questões acerca da disciplina enquanto disciplina ou meta-questões. Conseqüentemente, podemos distinguir dois estratos associados a qualquer domínio científico: o 'corpo' do conhecimento (respostas ao primeiro tipo de questões) e 'imagens' do conhecimento (respostas ao segundo tipo de questões). O corpo do conhecimento inclui teorias, 'factos', métodos e problemas abertos. As imagens do conhecimento desempenham o papel de 'seletores' para o corpo do conhecimento, ao responderem a meta-questões, como: Qual dos problemas abertos da disciplina é mais premente? Como poderemos decidir entre teorias emulantes? O que deve ser considerado um experimento relevante? Quais procedimentos, quais indivíduos ou quais instituições têm autoridade para deliberar acerca de desacordos no âmbito da disciplina? Etc. É claro que respostas a esse tipo de indagações são dadas não somente pelo conteúdo substantivo do corpo do conhecimento como também por fatores suplementares e externos.

Às vezes, pode ser árduo distinguir entre o puro corpo do conhecimento e as imagens puras do conhecimento. Claramente a teoria do movimento de Newton pertence ao corpo da física; trata-se de sentença acerca do movimento de corpos. A assertiva de que a teoria de Einstein é 'mais simples' que a teoria de Newton claramente pertence às imagens do conhecimento científico; trata-se de uma asserção acerca de teorias físicas e não de uma asserção acerca dos objetos físicos. Por outro lado, os teoremas de Gödel pertencem ao corpo da matemática; são resultados obtidos no âmbito de um ramo específico da disciplina. Todavia, também podem ser considerados um asserto (nesse caso, uma limitação intrínseca) *acerca* da matemática, a disciplina.

A ciência, como sistema de conhecimento, é composta de dois estratos, o corpo e as imagens do conhecimento, que atuam recíproca e organicamente e que não têm existência separada. A separação aqui referida é uma separação analítica, que o historiador da ciência pode ulteriormente identificar. O estudo da ação recíproca entre esses dois estratos pode fornecer percepções significativas para a compreensão do crescimento do conhecimento científico geral; em particular, o modo pelo qual o corpo e as imagens do conhecimento matemático interatuam pode lançar nova luz sobre as investigações históricas e filosóficas da matemática e sobre as diferenças entre a matemática e outras disciplinas científicas ⁽²⁸⁾. Como veremos adiante, o esquema de corpo e imagens pode ajudar-nos a entender o tema das revoluções em matemática e é, portanto, conveniente elaborar brevemente sobre essa questão.

Fatos e teorias são continuamente acrescidos e excluídos do corpo do conhecimento científico. Contudo, em oposição a outras disciplinas, proposições que, mediante prova, se inscreveram no corpo da matemática raramente são rejeitadas, quando muito. Novos teoremas e novas provas de antigos teoremas não falsificam teoremas ou provas antigas. Além disso, o processo de mudança matemática não se reduz à simples acumulação sucessiva. O descobrimento de um novo teorema, de uma nova prova ou de um novo conceito é apenas um dos modos pelos quais muda o conhecimento matemático. Ainda mais, na ocasião de um tal descobrimento, são as imagens do conhecimento (as quais são determinadas pelo conteúdo do corpo do conhecimento mas também por considerações sociais e filosóficas, pela ação recíproca entre a matemática e as outras ciências etc.) que determinam o modo segundo o qual o novo item será integrado ao quadro existente do conhecimento, quer considerando-o uma contribuição importante, quer ignorando-o. Mudanças sucessivas nas imagens do conhecimento podem posteriormente transformar a posição relativa das peças existentes do conhecimento aceito; teorias, técnicas ou classes de problemas tidas como irrelevantes pelas imagens dominantes do conhecimento podem finalmente, em um outro sistema de imagens da matemática, configurar-se no foco de atenção da comunidade matemática ou, pelo menos, de uma parte específica dessa comunidade ⁽²⁹⁾. Assim, a mudança não se efetua apenas *quantitativamente*, pela adição de novos resultados ou conceitos. Certamente essas adições são fundamentais ao crescimento da matemática mas a mudança real ocorre somente quando o crescimento quantitativo é acompanhado por uma nova apreciação *qualitativa* do corpo do conhecimento.

Afirmar acima que proposições ingressas no corpo da matemática mediante prova, quando muito, raramente são rejeitadas. *Raramente*, ao invés de *nunca*, pois ocorreram diversos casos nos quais provas aceitas como corretas foram posteriormente consideradas inadequadas. O exemplo mais conhecido disso, mas certamente não o único, é a prova equivocada por Cauchy da convergência a uma função contínua de uma sequência de funções contínuas. Nada obstante, é importante acentuar que, quando se detectam em matemática exemplos desse jaez, sua remoção implica apenas melhoramentos locais e nunca a rejeição total da teoria na qual ocorrem. Assim, a mudança no corpo do conhecimento é quase unifilar e regulado por um cânone universalmente aceito, a existência de prova ⁽³⁰⁾.

Enquanto existem critérios perfeitamente claros para mudança no corpo do conhecimento matemático, o quesito da mudança nas imagens da matemática é muito mais sutil. Por um lado, enquanto existe um critério claro para aceitar um novo item no corpo da matemática (a existência de prova), não existem cânones universalmente aceitos para adotar, modificar ou rejeitar imagens do conhecimento matemático. Além disso, as imagens dominantes do conhecimento de uma disciplina matemática em uma dada época raramente são explicitamente articuladas, examinadas ou discutidas; são tacitamente compartilhadas pelos membros da comunidade matemática relevante e por eles consistentemente aplicadas, como uma regra. São frequentemente tidas como certas e raramente sujeitas sistematicamente ao escrutínio crítico. Contudo, certamente as imagens do conhecimento matemático são sujeitas à rejeição total bem como a modificações menores; seu desenvolvimento histórico não tem sido um processo de avanço infalível da ingenuidade ao refinamento, da concretude à abstração ou da fragilidade ao rigor ⁽³¹⁾. Como se mostrará nas discussões seguintes, o exame dos distintos cânones de mudança no corpo e nas imagens da matemática pode lançar nova luz no estudo do desenvolvimento das idéias matemáticas ⁽³²⁾.

Apoiados no segundo plano por esse relato esquemático do crescimento do conhecimento matemático nos termos de corpo e imagens do conhecimento, passarei a considerar, separadamente para o corpo e para as imagens do conhecimento, a relevância da agenda kuhniana para a história da matemática.

Consideremos primeiramente o quesito da racionalidade. Sempre podemos objetar que a lógica é assunto de convenção e que, portanto o asserto (3.1) também se aplica ao corpo

da matemática. Embora esse seja um tema muito difícil de tratar no contexto presente, podemos responder brevemente a essa objeção com o argumento de Lakatos (anteriormente formulado por Popper no contexto geral da ciência) de que a racionalidade da matemática reside na possibilidade de se discutirem criticamente as provas existentes. De qualquer modo, decorre do que foi dito que o asserto (3.2), quando muito, dificilmente se aplica ao corpo da matemática: a escolha entre incluir ou não incluir um item no corpo do conhecimento não exige explicações psicológicas ou sociológicas. Certamente existem algumas escolhas de matemáticos que podem exigir tal explicação mas essas escolhas situam-se como imagens do conhecimento: a escolha da própria disciplina de especialização e dos problemas específicos por serem examinados, a escolha das ferramentas legítimas para se resolverem os problemas escolhidos, a determinação de argumentos típicos como provas canônicas de uma dada subdisciplina etc. Assim, considerações de mercado podem explicar, digamos, o florescimento de disciplinas relevantes à ciência de computação ou à estatística e o declínio de outras subdisciplinas durante a última década; argumentos sociológicos ou psicológicos podem explicar porque se enfrentou uma dada questão ou porque se procurou a prova de um teorema. Esses não são necessários, contudo, para explicar porque, após se haver encontrado a prova, um dado teorema foi acrescentado ao corpo do conhecimento nesses ramos particulares.

Com respeito a paradigmas, podemos repetir mais ou menos o argumento acima. Um paradigma (quer se trate de um caso exemplar de um teorema, de um manual particular, de uma técnica bem-sucedida aplicada a um ramo particular, de um tipo de problema que se mostrou fecundo etc.) pode conduzir à adoção (ou à modificação ou à rejeição) de um sistema de imagens do conhecimento em um dado ramo da matemática ou na matemática como um todo. Essa escolha dirige o interesse dos pesquisadores e, assim, um teorema particular pode lograr ser considerado ou, ao contrário, a atenção pode ser desviada dele. Porém, novamente, se um dado teorema for considerado, será aceito como verdadeiro somente se for apoiado em prova. Assim, paradigmas afetam diretamente as imagens e apenas indiretamente (através das imagens) tocam o corpo do conhecimento; a existência de um método bem-sucedido para resolver problemas em um dado ramo da matemática pode explicar a *tentativa* de aplicá-lo a outros ramos mas não dão conta do próprio sucesso do método. Portanto, a validade de qualquer versão dos assertos (2.1) e (2.2) restringe-se à prioridade conceitual e à in-

fluência de paradigmas apenas sobre as imagens do conhecimento. Outro tanto é válido, *mutatis mutandis*, quanto à relevância epistemológica da comunidade matemática e quanto às assertivas (4.1), (4.2) e (4.3). Os argumentos e exemplos acima de Dauben podem ser reformulados, sustentando-se que eventos particulares na história da matemática provocaram mudanças nas imagens do conhecimento, as quais [consoante (4.3)] afetaram as imagens do conhecimento de toda a disciplina. Eles também parecem implicar que [consoante (1.1)] as mudanças vertentes importaram na rejeição das imagens existentes da matemática.

Assim, resta-nos o tema da mudança normal versus a mudança revolucionária. Na mudança revolucionária, como já foi dito, existe mais que o simples acréscimo; cânones de racionalidade, crenças metafísicas e a própria linguagem são questionadas. Além disso, na mudança revolucionária alguma coisa essencial deve ser excluída do corpo existente da ciência. Já que o corpo do conhecimento matemático é emendado apenas localmente e desde que ele muda, essencialmente, por acréscimo, então, obviamente, não pode existir em matemática nada semelhante à ciência puramente revolucionária. Os assertos (1.1), (1.2) e (1.3) não têm sentido no que diz respeito à matemática. Por outro lado, imagens existentes da matemática podem efetivamente ser substituídas por imagens novas. Assim, um problema que, durante um certo lapso de tempo, é considerado o mais urgente de um particular ramo matemático e que faz com que a totalidade das investigações nesse ramo seja dirigida para a solução desse problema pode ser totalmente esquecido após um intervalo de tempo, quer por haver sido resolvido, quer por, em seu lugar, haverem surgido problemas novos, mais atraentes e mais provocantes, criando assim um novo foco de atenção para a comunidade relevante. Vem à mente o exemplo do último teorema de Fermat.

O próprio fato de que a mudança nas imagens do conhecimento inclui processos de rejeição abre caminho, em princípio, para a existência de mudança revolucionária; de novo podemos discutir acerca da ocorrência de tais processos revolucionários na história da matemática. Sustentarei, abaixo, que algumas mudanças nas imagens da matemática foram revolucionárias em um grau considerável; todavia, hesito quanto a uma versão extrema dos assertos (1.1), (1.2) e (1.3), relativamente às imagens do conhecimento matemático. Seja como for, esse é um quesito de fato histórico e não de possibilidade lógica. Com respeito ao asserto (1.5), já que toda mudança no corpo do conheci-

mento é mudança normal, decorre obviamente que existe mudança significativa que não é revolucionária. Se admitirmos a possibilidade de mudança revolucionária nas imagens do conhecimento, então será provável que alguns de seus exemplos não constituam ruptura primária. Finalmente, se admitirmos a possibilidade de mudança revolucionária nas imagens do conhecimento, poderemos defender o asserto (1.4) com diversos graus de compromisso, baseados em evidência histórica.

4. Revoluções nas imagens da matemática

Na seção precedente, sustentei que existe um cânone universalmente aceito para determinar se um item deve ser acrescido ao corpo do conhecimento, a saber, sua confirmação por prova dedutiva. O fato de que assim seja constitui uma imagem do conhecimento; com efeito, essa é a imagem seminal e constitutiva do conhecimento matemático da qual dispomos desde os antigos gregos. Porém ser uma imagem do conhecimento decorre de um processo histórico particular e contingente ao invés de constituir um aspecto necessário do conhecimento em si. Com efeito, antes da adoção da prova dedutiva como pedra de toque da verdade matemática, diversas culturas adquiriram um acervo considerável de 'fatos' aritméticos e geométricos. Podemos afirmar que isso não deve ser considerado 'conhecimento matemático verdadeiro' antes de ser legitimado por prova dedutiva mas obviamente esse asserto considera pacífico que conhecimento matemático é conhecimento legitimado por prova dedutiva. A acumulação de 'fatos matemáticos conhecidos', a concepção da própria possibilidade de justificar esse conhecimento mediante prova dedutiva, o descobrimento de provas particulares, a aquisição de novo conhecimento matemático mediante prova — todos esses são aspectos diferentes de um mesmo processo de transformação. Essa foi a primeira grande transformação das imagens do conhecimento matemático que afetou a totalidade da disciplina: a 'transformação dedutiva'. Porque e como ocorreu essa transformação? Essa é um quesito de indagação histórica e seria elucidativo considerá-lo à luz da agenda kuhniana.

Notemos, antes de tudo, que o reconhecimento da prova dedutiva como critério decisivo de verdade matemática implica a rejeição de outros critérios anteriormente aceitos: mesmo a mais longa das listas de exemplos de uma situação matemática recorrente já não será suficiente para assegurar a veracidade de uma particular sentença matemática; doravante exige-se um argumento dedutivo. Sob

esse aspecto, a transformação dedutiva foi certamente uma mudança revolucionária de imagens do conhecimento; não foi apenas o mero acréscimo de mais um critério de verdade aos preexistentes mas implicou que uma imagem, até então significativa, do conhecimento teria de ser recusada. Simultaneamente, contudo, essa mudança revolucionária nas imagens do conhecimento não provocou necessariamente a rejeição do corpo existente do conhecimento. A revolução disse respeito aos critérios de veracidade do conhecimento matemático e não ao conteúdo específico desse conhecimento.

A influência dessa particular mudança de imagens do conhecimento no curso futuro dos eventos foi onipresente; hoje em dia não podemos falar de matemática sem pensar em prova como critério de verdade. Claramente, a transformação dedutiva foi muito mais decisiva na história da matemática que qualquer dos exemplos de Dauben ou que qualquer ruptura primária no corpo do conhecimento na qual possamos pensar. Simultaneamente, contudo, a transformação dedutiva é, com efeito, um bom exemplo de 'mudança revolucionária', o qual não é uma 'ruptura primária' no sentido da invenção do cálculo, do descobrimento das grandezas incomensuráveis ou de qualquer outra inovação particular no corpo do conhecimento. De fato, a adoção dessa nova imagem do conhecimento matemático provocou, com o correr do tempo, muitas inovações no corpo do conhecimento porém de modo algum importou na recusa de itens anteriormente aceitos do corpo do conhecimento. Novamente, no âmbito desse contexto de idéias, ainda há espaço para discussão por historiadores acerca da validade dos assertos (1.3) e (1.4) para esse exemplo particular de transformação.

Podemos encarar a 'transformação dedutiva' nos termos da 'mudança de paradigma' (na acepção discutida acima). De fato, tal transformação não foi em si mesma um descobrimento de um novo fato, argumento ou teoria particular da matemática porém desempenhou um papel instrumental no condicionamento dos descobrimentos subseqüentes. Assim, existe espaço para disputa histórica, no caso da transformação dedutiva, no que tange aos assertos (2.1) e (2.2).

Surgem questões interessantes, quando consideramos o tema da racionalidade (consoante 3.1 e 3.2) relativamente à transformação dedutiva. Por exemplo, é óbvio que, havendo escolhido a prova dedutiva como critério de verdade, foram também instituídos critérios de racionalidade no corpo da matemática. Podem porém critérios de racionalidade ser articulados para escolhas gerais nas imagens do

conhecimento? Mais especificamente, o ato histórico de se adotar a prova dedutiva como critério de verdade pode ser justificado com argumentos racionais? Notemos que esse não é um quesito de princípio mas um tema histórico. O quesito de princípio pode ser respondido, por exemplo, com um argumento popperiano: se uma escolha for submetida à disputa crítica, é essa disputa que confere seu caráter de racionalidade à escolha. Em contraposição, o quesito histórico consiste em saber se a escolha foi realmente feita com bases racionais ou, quiçá, com outros fundamentos (condicionada social ou psicologicamente). Sinto-me inclinado a responder que a escolha foi de fato justificada em bases racionais porém, simultaneamente, penso que a assertiva oposta também pode ser defendida e que a disputa deve ser decidida com base em evidências históricas. Como foi argumentado na seção precedente, nessa disputa podemos também considerar o papel da comunidade matemática ou científica ao provocar escolhas particulares de imagens do conhecimento e, mais especificamente, a escolha da prova dedutiva como critério de veracidade.

Poderão indicar-se, ao longo da história da disciplina, casos de mudanças ulteriores nas imagens da matemática com alcance e importância semelhantes aos da transformação dedutiva? A resposta parece claramente ser negativa — até agora. Com efeito, cânones de prova mudaram através da história e essas mudanças foram percebidas e minuciosamente descritas por historiadores da matemática bem como pelos próprios matemáticos. Porém tais mudanças afetaram aspectos limitados das imagens do conhecimento e freqüentemente domínios restritos do conhecimento matemático; até agora não se contestou a hegemonia da própria prova dedutiva como critério *exclusivo* de veracidade de toda a matemática. No entanto, poderíamos perceber no horizonte a possibilidade de um desafio casual a essa hegemonia. As provas probabilísticas e as provas assistidas por computador são oponentes potenciais, talvez não destinados a vencer mas, pelo menos, a partilhar uma porção limitada do trono.

É do conhecimento comum que, desde a parte final do século XIX, o linguajar probabilístico se foi introduzindo, de modo crescente, em muitas disciplinas intelectuais, chegando a tornar-se um outro modo legítimo de se justificarem tanto assertivas individuais quanto teorias inteiras nesses domínios. Em particular, a adoção na física de argumentos probabilísticos e de teorias inteiras que apenas reivindicam ser uma descrição probabilística dos fenômenos tem sido referida como ponto de ruptura na

própria concepção da ciência. Raramente tem sido apontado, contudo, que a matemática é notória entre as disciplinas que firmemente negam qualquer suporte a argumentos probabilísticos como critério de verdade ⁽³³⁾. Com efeito, o desenvolvimento da teoria das probabilidades desde o século XVII até a sua axiomatização por Kolmogorov no século XX foi concomitante com o desenvolvimento de muitas outras teorias matemáticas; o crescente refinamento matemático no tratamento das probabilidades pode haver tido algum grau de influência na adoção gradual de argumentos probabilísticos em outras ciências porém em sentido algum transformou os critérios de verdade para matemática como o fez para outras disciplinas — até agora. Afirmativas matemáticas são provadas, tanto na teoria das probabilidades quanto em qualquer outro ramo da matemática, por argumentos dedutivos e a afirmativa matemática ' $P(X) = p$ ' (isto é, que um certo evento X tem a probabilidade p) é adotada com o mesmo grau de certeza que o de qualquer assertiva matemática. Contudo, pelo contrário, saber que $P(A) = p$, onde A é qualquer sentença matemática e p é extremamente perto de 1 não outorga a A o *status* de verdade.

Mas embora o desenvolvimento da teoria das probabilidades e a adoção de argumentos probabilísticos em outras disciplinas não tenham sido seguidos por uma adoção concomitante de argumentos semelhantes como critério de verdade matemática, os desenvolvimentos na lógica e na teoria dos algoritmos poderão, no futuro, conduzir a um tal resultado. De fato, recentemente foi demonstrada a existência de certas sentenças decidíveis cujas provas são tão longas que nem um ser humano nem uma máquina podem efetivamente transcrevê-las. Foi proposto que a veracidade de tais sentenças seja admitida, desde que apresentem um grau muito elevado de probabilidade. Um exemplo clássico disso é o algoritmo de Michael Rabin para provar que um dado número seja primo ⁽³⁴⁾. O algoritmo de Rabin toma um número n e calcula muito efetivamente a probabilidade P de que ' n não seja primo'. Rabin aplicou seu algoritmo a números grandes e, se a um certo número n correspondesse uma probabilidade P menor que uma em um bilhão, ele declararia que n é 'primo para todos os efeitos práticos' ⁽³⁵⁾. Uma assertiva desse tipo em um texto matemático estaria fadado, ao ser lido, a provocar viva controvérsia; na prática, porém, embora alguns colegas replicassem, o resultado de Rabin não suscitou muita disputa. Penso que isso decorra de ela dizer respeito a um resultado relativamente insulso. Seria interessante especular acerca do que ocorreria, se um resultado muito central somente se pudesse

demonstrar mediante argumentos probabilísticos. Seja como for, a existência da prova indica a real possibilidade de se produzir um critério alternativo de veracidade em matemática.

As provas assistidas por computador tornaram-se o foco de discussão filosófica depois da notável demonstração, por Apple e Haken, de um resultado que constituía questão aberta por longo tempo: o teorema das quatro cores. Não é esse o lugar adequado à discussão minuciosa dessa prova nem das reações decorrentes. Apenas notemos que, embora a aceitação de um tal prova como legítima implique a transgressão de antigos tabus matemáticos, parece que uma parte perceptível da comunidade matemática chegou a um acordo com ela. Obviamente, todos ficariam mais satisfeitos com um prova normal e dedutiva do teorema; ainda assim, admite-se, em geral, que o teorema tenha sido demonstrado.

Provas probabilísticas e provas assistidas por computador ainda são marginais na matemática: Acredito que, mesmo se elas se tornarem mais comuns, somente os argumentos dedutivos se conservarão, em um futuro previsível, como o critério preferido de verdade matemática. Ainda assim, a própria existência de critérios alternativos e o próprio fato de os matemáticos haverem visto a necessidade de se pronunciarem a esse respeito implicam que a parede do consenso matemático não é absolutamente sólida, mesmo acerca de seu princípio primordial, e que disputas e mudanças ulteriores nas imagens centrais do conhecimento matemático provavelmente ocorrerão no futuro. Certamente, permanece aberta a questão: no futuro, seremos testemunhas de uma segunda mudança *revolucionária* nas imagens do conhecimento, acerca do alcance e do significado da transformação dedutiva?

5. A revolução estrutural em álgebra

Finalmente, desejo considerar brevemente o ascenso da tendência estrutural em álgebra, nos termos dos conceitos acima discutidos. Acredito que isso elucidará o tipo de percepções que estamos fadados a obter de um exame de episódios particulares na história da matemática nos termos da agenda kuhniana e do esquema “corpo e imagens” do conhecimento.

A essência do tratamento estrutural em álgebra é o reconhecimento de que diversos conceitos, surgidos em contextos matemáticos distintos, ainda que aparentados, são efetivamente variedades individuais de uma mesma espécie

de entidade matemática, a saber, a 'estrutura algébrica'. Os matemáticos descobriram que emergia uma perspectiva fecunda, quando estudavam todos esses conceitos de um ponto de vista comum; isto é, quando os definiam em termos semelhantes (isto é, mediante uma formulação axiomática abstrata) e, então, os investigavam, propondo questões semelhantes, usando ferramentas conceituais semelhantes para resolvê-las (isomorfismos, estruturas quocientes, extensões etc.) e esperando dar respostas semelhantes como as respostas legítimas da disciplina.

O ascenso do tratamento estrutural em álgebra pode, pois, ser enxergado como a adoção de uma nova imagem do conhecimento matemático ao invés de uma ruptura primária no corpo do conhecimento. Certamente que essa mudança ocorreu depois que um acervo considerável de novos conceitos e resultados foi acrescentado ao corpo do conhecimento algébrico ao longo das últimas poucas décadas; ainda assim, não se pode argumentar que esse crescimento *necessariamente* implicasse uma mudança de perspectiva semelhante à que efetivamente aconteceu.

Relatos tradicionais da ascensão da tendência estrutural em álgebra foram atingidos por duas formas principais e características de confusão. A primeira consiste em identificar essa nova tendência exclusivamente com a adoção amplamente propagada da formulação abstrata de conceitos. Uma inspeção mais próxima dos fatos históricos mostra que a mera habilidade técnica em formular tais definições não trouxe mudança real nas imagens da álgebra até que tal habilidade fosse combinada com a identificação dos diversos conceitos (grupos, corpos, anéis etc.) como variedades da mesma espécie ⁽³⁷⁾. A segunda forma de confusão diz respeito a dois fatos: (a) diversas definições formais de 'estrutura matemática' foram propostas e (b) o desenvolvimento da tendência estrutural em álgebra tem sido freqüentemente narrado como o desenvolvimento de uma das particulares definições formais ⁽³⁸⁾. Por falta de espaço, não podemos discutir aqui esses temas; assim, restrinjo-me a resumir as afirmativas acima, enfatizando que a ascensão da tendência estrutural em álgebra implicou, sobretudo, uma mudança nas imagens do conhecimento matemático.

A plena realização da imagem estrutural da álgebra apareceu impressa primeiramente na *Moderne Algebra* de Van der Waerden ⁽³⁹⁾. Embora Van der Waerden não o dissesse explicitamente, seu livro representou um afastamento patente de qualquer imagem anterior da álgebra; apresentou a álge-

bra como uma disciplina matemática cujo desígnio consiste na definição dos diversos sistemas algébricos e na elucidação de suas respectivas estruturas. Em contraposição, a imagem clássica da álgebra encarava a disciplina comprometida com equações polinomiais e com o problema de sua solubilidade ⁽⁴⁰⁾. Podemos ver agora como a agenda kuhniana é útil na avaliação do significado histórico da publicação do livro de van der Waerden e, mais geralmente, do ascenso do tratamento estrutural em álgebra.

Primeiramente, devemos perguntar se a ascensão do tratamento estrutural e a publicação da *Moderne Algebra* eram exemplos de mudança revolucionária nas imagens do conhecimento algébrico. A imagem da álgebra, dominante no século XIX, conforme referimos acima, considerava-a como uma disciplina que trata da resolução de equações polinomiais e, mais geralmente, do problema de sua solubilidade. Sob a nova imagem da álgebra, esse problema foi relegado a um quesito particular pertinente a uma subdisciplina particular, a teoria de Galois, a qual é, ela própria, subsidiária de outros subdomínios mais amplos da álgebra, tais como a teoria dos grupos e a teoria dos corpos. Assim, no nível do corpo da álgebra, não houve rejeição dos itens existentes porém, sob a nova imagem, a importância relativa desses itens foi reavaliada. A mudança nas imagens do conhecimento consistiu, no caso vertente, não em se haver resolvido completamente o problema da solubilidade de equações polinomiais no contexto da teoria de Galois mas em se haver passado a considerar a última teoria como uma teoria que trata do problema das extensões de corpos abstratos e que usa as ferramentas fornecidas pela teoria dos grupos ⁽⁴¹⁾.

Parece haver ainda espaço para disputas históricas concernentes aos assertos (1.1)-(1.5). Relativamente ao asserto (1.1), sinto-me fortemente inclinado a afirmar que esse não foi um caso de mudança puramente revolucionária nas imagens do conhecimento e que também existem muitos elementos de continuidade; ainda assim, podemos defender alguma versão do asserto (1.3) relativa a esse evento. Podemos ainda indagar se [consoante (1.2)] o tipo de mudança representado pela ascensão do tratamento estrutural da álgebra ocorre muito freqüentemente na história da matemática ou se, pelo contrário, constitui um evento assaz esporádico. O asserto (1.4) aduz uma questão interessante por ser investigada pelo historiador da matemática. Penso que o processo histórico que conduziu à concepção subjacente à *Moderne Algebra* se revelará, mediante inspeção mais acurada pelos historiadores, um processo

composto peça por peça; simultaneamente, contudo, dispomos de testemunhos do próprio van der Waerden e de diversos outros matemáticos de haverem passado por uma experiência de comutação perceptiva, quando pela vez primeira encontraram essa concepção — a adoção por eles das novas imagens da álgebra foi na verdade 'um evento subitâneo e não estruturado'⁽⁴²⁾. Finalmente, o ascenso da tendência estrutural não foi uma 'ruptura primária', na acepção em que o foram o descobrimento da incomensurabilidade ou o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Em particular, o livro de van der Waerden não conteve nenhum teorema ou prova importante e recente que não houvesse sido publicado antes; ainda assim, se sentiria sua influência em muitos domínios da matemática além da álgebra, no curso das décadas futuras. Certamente que a álgebra não era a mesma disciplina antes e depois da publicação da *Moderne Algebra*.

No que toca o tema dos paradigmas, o tratamento estrutural pode efetivamente ser tomado como exemplo elucidativo de aquisição paradigmática no nível das imagens da matemática. Esse tratamento não é em si uma teoria ou um teorema específico; ainda assim, foi instrumental em conformar o curso futuro do desenvolvimento, não apenas da álgebra, mas de todas as disciplinas que o adotaram. Além disso, seu processo de desenvolvimento e de consolidação foi diferente dos processos de desenvolvimento e de consolidação de teorias matemáticas individuais; não foi configurado pelo descobrimento de teoremas particulares nem de conceitos matemáticos subjacentes nem havia um problema particular cuja solução fosse sua *raison d'être*. Além disso, há espaço para disputa no que tange ao asserto (2.2); um algebrista pode trabalhar simultaneamente sob a influência de ambas as imagens da álgebra, a estrutural e a clássica? Em princípio, não parece existir razão lógica para impedir tal fato; ainda assim, também é importante considerar o que realmente ocorreu. Esse tema está aberto à pesquisa histórica.

O tema da racionalidade suscita aqui quesitos ulteriores para a pesquisa histórica. Havia motivos racionais para a adoção amplamente disseminada do tratamento? Se os houve, podemos deduzir regras universalmente válidas que se apliquem a todas as escolhas de imagens do conhecimento na história da matemática? Ou, pelo contrário, devemos explicar essa mudança em termos sociológicos ou psicológicos? Isso também nos levará a decidir se os temas (4.1)-(4.3) são relevante à presente discussão. Mais uma vez, a isso deverá responder a pesquisa histórica ulterior.

6. Conclusão

A revolução científica pode ser definida e caracterizada de muitos modos distintos. Tanto mais significativo torna-se-á esse conceito como categoria de pesquisa histórica quanto mais audaz ele for em seus pressupostos implícitos relativos ao desenvolvimento do conhecimento científico. O relato anterior dos temas envolvidos na agenda kuhniana permite uma avaliação relativa dos méritos das definições alternativas de 'revoluções científicas'.

Considerada nesses termos, concluimos que qualquer definição significativa de 'revoluções científicas' que permita distinguir entre 'revoluções' e 'rupturas primárias' exclui a possibilidade de que tais revoluções aconteçam no corpo do conhecimento matemático. Por outro lado, contudo, revoluções podem efetivamente ocorrer nas imagens da matemática. Os relatos anteriores do papel da prova em matemática e o ascenso do tratamento estrutural na álgebra ilustram a contribuição potencial decorrente de se estudarem, dessa perspectiva, eventos específicos da história da matemática.

--

Notas:

- (1) Veja-se, por exemplo, a extensa bibliografia publicada em G. Gutting (ed.), *Paradigms and Revolutions* (Notre Dame: Notre Dame University Press, 1980).
- (2) Segundo Phillip Kitcher, essa formulação descreve a opinião do próprio Kuhn. Cf. P. Kitcher, 'Theories, theorists, and theoretical change', *Philosophical Review* 8 (1979), 519-547, p. 520.
- (3) T. S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (Chicago: University of Chicago Press, 1962), p. 121.
- (4) T. S. Kuhn, *What are scientific revolutions?*, em L. Krüger et alii (eds.), *The probabilistic revolution* (Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1988), pp. 7-22. Veja-se p. 19.
- (5) Essa formulação é extraída de J. W. N. Watkins, 'Against normal science', em I. Lakatos & A. Musgrave (eds), *Criticism and the growth of knowledge* (Cambridge: Cambridge University Press, 1970), pp. 25-38, p. 34.
- (6) Vale ressaltar que, ao caracterizar, em 1988, as revoluções científicas (cf. Kuhn, *op. cit.*, nota 4), Kuhn nem sequer referiu o vocábulo 'paradigma'. Assim procedendo, ele finalmente excluiu esse tema problemático de sua própria versão da agenda kuhniana.

- (7) Esse tem sido um dos alvos centrais da crítica de Popper a Kuhn. Cf. K. Popper, 'Normal science and its dangers', em Lakatos & Musgrave, *op. cit.*, nota 5, pp. 51-58. Veja-se p. 56: "A tese relativista de que o esquema não pode ser discutido criticamente deve ser discutido racionalmente ... O Mito do Esquema constitui, em nossa época, o baluarte central da irracionalidade ... Ela simplesmente exagera uma dificuldade em uma impossibilidade."
- (8) Isso é lucidamente descrito em M. D. King, 'Reason, tradition, and the progressiveness of science', em Gutting, *op. cit.*, nota 1, pp. 97-98.
- (9) A última transformação das opiniões de Kuhn a esse respeito é explicada (e deplorada) em King, *op. cit.*, nota 8, pp. 107-115.
- (10) Essa última formulação é tomada de Gutting, *op. cit.*, nota 1, p. 11. Gutting acredita que essa frase abrange 'o significado real da obra de Kuhn'.
- (11) Na verdade, a obra de Kuhn foi criticada por supostamente conter um argumento circular nesse passo. Supostamente definia uma comunidade científica como um grupo de praticantes que partilham um paradigma e conceituava um paradigma como aquilo que é partilhado por uma comunidade científica. Veja-se A. Musgrave, 'Kuhn's second thoughts', em Gutting, *op. cit.*, nota 1, pp. 39-53. Veja-se p. 40.
- (12) T. S. Kuhn, 'Second thoughts on paradigms', em F. Suppe (ed.), *The structure of scientific theories* (Urbana: University of Illinois Press, 1974), pp. 459-482. Veja-se p. 464.
- (13) Veja-se J. Dauben, 'Conceptual revolutions and the history of mathematics', em E. Mendelsohn (ed.), *Transformation and tradition in the sciences* (Cambridge: Cambridge University Press, 1984), pp. 81-103. Um dos desígnios do artigo de Dauben era refutar a negação por M. J. Crowe da existência de revoluções em matemática. Veja-se M. J. Crowe, 'Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics', *Historia Mathematica* 2 (1975), 161-166. Veja-se p. 165.
- Tentativas subseqüentes de uma análise kuhniana encontram-se em P. Kitcher, *The nature of mathematical knowledge* (New York: Oxford University Press, 1983), pp. 149 e seguintes; e em H. Mehrtens, "T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the new historiography of mathematics", *Historia Mathematica* 3 (1976), 297-320. Para uma crítica de seus pontos de vista (levemente distinta da pretendida no presente ensaio), leia-se L. Corry, Linearity and reflexivity in the growth of mathematical knowledge, *Science in Context* 3 (1989), 409-440. Veja-se pp. 427-429.
- (14) Em um simpósio sobre 'Estruturas em teorias matemáticas', realizado em San Sebastián, Espanha, em setembro de 1990, Dauben retomou o tema e forneceu três exemplos suplementares da revoluções: a invenção do cálculo por Leibniz e Newton, o cálculo com ϵ - δ de Cauchy e a análise não canônica de Abraham Robinson.
- (15) Dauben refere I. B. Cohen 'The eighteenth-century origins of the concept of scientific revolutions', *Journal of the History of Ideas* 37 (1976), 257-288, e I. B. Cohen, *The Newtonian revolution, with illus-*

trations of the transformations of scientific ideas (Cambridge: Cambridge University Press, 1976). Para uma reformulação recente dessas idéias, veja-se I. B. Cohen, 'Scientific revolutions, revolutions in science, and a probabilistic revolution 1800-1930', em Krüger et alii, *op. cit.*, nota 4, pp. 23-44.

(16) Cf. Dauben, *op. cit.*, nota 14, p. 13.

(17) *Ibidem*, p. 82.

(18) *Ibidem*, p. 84.

(19) *Ibidem*, p. 88-89.

(20) O próprio I. B. Cohen, casualmente, enfatizou a necessidade de, ao se definirem revoluções científicas, se responder claramente a esses tipos de questão. Cf. 'Scientific revolutions, revolutions in science, and a probabilistic revolution 1800-1930', in Krüger et alii, *op. cit.*, note 4, pp. 23-24. Veja-se p. 23: 'Um dos problemas na discussão de qualquer conjunto revolucionário de mudanças no pensamento ou na prática científica é aceitar, um tanto subjetivamente, a sentença: a duração na escala temporal implica que o processo de mudança tenha sido uma revolução ou uma evolução.'

(21) Dauben, *op. cit.*, p. 88.

(22) *Ibidem*, p. 93.

(23) *Ibidem*, p. 93. Em itálico no original.

(24) Os três outros exemplos de revoluções em matemática propostos por Dauben em sua palestra em San Sebastián (nota 14, acima) reforçam a credibilidade de minha presente conclusão.

(25) Dauben, *op. cit.*, nota 13, p. 88.

(26) *Ibidem*, p. 93.

(27) Dos três outros exemplos apresentados por Dauben, a análise não canônica certamente não preenche o critério.

(28) Uma discussão abrangente do esquema corpo/imagens para o conhecimento científico geral figura em Y. Elkana, 'A Programmatic Attempt at an Anthropology of Knowledge', em E. Mendelsohn e Y. Elkana (eds), *Sciences and Cultures, Sociology of the Sciences*, vol. (Dordrecht, Boston and London: Reidel, 1981), pp. 1-170. Para uma discussão minuciosa do esquema como ferramenta útil ao estudo da história da matemática, veja-se Corry, *op. cit.*, nota 13.

(29) Para um exemplo ilustrativo de como mudanças nas imagens do conhecimento podem provocar uma reavaliação do corpo existente do conhecimento veja-se H. M. Edwards, 'An appreciation of Kronecker', *The Mathematical Intelligencer* 9 (1987), 28-35, pp. 33-35. Certamente que o relato de Edwards não está explicitamente vazado nos termos do esquema corpo/imagens.

(30) Veja-se Corry, *op. cit.*, nota 13, pp. 419-421.

(31) Esse tema é discutido muito minuciosamente em *ibid.*, pp. 422-425.

- (32) Um exemplo elaborado de análise do desenvolvimento de idéias matemáticas nos termos de mudanças separadas embora correlatas no corpo e nas imagens do conhecimento encontra-se em L. Corry, 'Nicholas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure', *Synthese* **92** (1992), 315-348.
- (33) É notável que, no Krüger, *op. cit.*, nota 4, recentemente publicado, esse fato nem sequer é referido ou examinado.
- (34) M. Rabin, 'Probabilistic Algorithms', em J. F. Traub (ed.), *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results* (New York: Academic Press, 1976, pp. 21-40.
- (35) O ensaio de Rabin e suas implicações são discutidas em G. B. Kolata, 'Mathematical Proofs: The Genesis of Reasonable Doubt', *Science* **192** (1976), 989-990.
- (36) Veja-se T. Tymoczko, 'The Four-Color Problem and its Philosophical Significance', *Jornal of Philosophy* **76** (1979), 57-83, e M. Detlefsen & M. Lucker, 'The Four-Color Problem and Mathematical Proof', *Jornal of Philosophy* **77** (1980), 803-824.
- (37) Veja-se L. Corry, 'Libros de Texto e Imágenes del Álgebra en el Siglo XIX', *Llull* **14** (1991), 7-30.
- (38) Veja-se Corry, *op. cit.*, nota 13.
- (39) B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* (Berlin: Springer Verlag, 1930).
- (40) Isso é descrito mais minuciosamente em Corry, *op. cit.*, nota 13, pp. 23-28.
- (41) Para um relato detalhado do desenvolvimento da teoria de Galois e de sua influência no ascenso da imagem estrutural da álgebra, veja-se L. Toti Rigatelli, *La mente algebrica — Storia dello sviluppo della teoria di Galois nel XIX secolo* (Varese: Bramante Editrice, 1989), pp. 125-148, e B. M. Kiernan, 'The development of Galois theory from Lagrange to Artin', *Archive for the History of Exact Sciences* **8** (1971), 40-154; vejá-m-se especialmente as páginas 135-144.
- (42) Cf., por exemplo, G. Birkhoff, 'Current trends in algebra', *American Mathematical Monthly* **80** (1973), 760-782 (veja-se p. 771); e J. Dieudonné, 'The work of Nicolas Bourbaki', *American Mathematical Monthly* **77** (1970), 134-145 (vejam-se pp. 136-137).

Título original:

Kuhnian issues, scientific revolutions and the history of mathematics.

Studies in History and Philosophy of Science, vol. 24, n. 1, pages 95-117, 1993.