Problemas matemáticos

David Hilbert
Traduzido por Marcelo Papini

Quem dentre nós não gostaria de erguer o véu que oculta o futuro, a fim de lançar um olhar sobre os progressos iminentes de nossa ciência e os segredos de sua evolução durante o próximo século! Por quais metas especiais aspirarão os espíritos matemáticos preeminentes das linhagens vindouras? Quais novos métodos e novos fatos, no vasto e rico campo do pensamento matemático, serão desvendados pelos novos séculos?

A história ensina a continuidade da evolução da ciência. Sabemos que cada época tem problemas próprios, os quais ou serão resolvidos pela geração vindoura ou, afastados como infecundos, serão substituídos por outros novos. Se quisermos obter uma idéia da evolução presuntiva do saber matemático no futuro próximo, deveremos deixar passarem, diante de nosso espírito, as questões não resolvidas e abranger com a vista os problemas colocados pela ciência hodierna, cuja solução esperamos do futuro. O dia de hoje, próximo à virada do século, parece-me assaz adequado a uma tal inspeção dos problemas; pois os cortes que separam os grandes períodos não apenas nos convidam a olhar para o passado mas também conduzem nossos pensamentos ao impendente desconhecido.

São irrefragáveis o alto significado de certos problemas para o progresso da ciência matemática em geral e o papel importante que eles desempenham, através do trabalho dos investigadores individuais. Um ramo do saber será vigoroso, enquanto oferecer problemas em abundância; a falta de problemas significa marcescência ou fim da evolução autônoma. A pesquisa matemática precisa de problemas, assim como todo empreendimento humano persegue metas. É mediante a resolução de problemas que o pesquisador tempera a sua força; ele encontra novos métodos e perspectivas e alcança um horizonte mais amplo e mais livre.

É difícil e, freqüentemente, é impossível julgar corretamente, de antemão, o valor de um problema; pois é o ganho, que o saber deve ao problema, que decide definitivamente sobre isso. Todavia, podemos perguntar se existem indícios gerais que caracterizem um bom problema matemático.

Um antigo matemático francês disse que uma teoria matemática só se pode considerar perfeita, quando se torna tão clara que pode ser explicada ao primeiro ser humano que se encontrar na rua. Essa clareza e essa inteligibilidade, aqui tão drasticamente exigidas de uma teoria matemática, eu demandaria, de melhor vontade, de um problema matemático, a fim de que ele seja perfeito; pois a clareza e a inteligibilidade nos atraem, enquanto a complicação nos intimida.

Além disso, um problema matemático deve ser difícil, a fim de nos provocar; todavia, não deve ser inteiramente inacessível, a fim de não troçar de nosso esforço; por fim, deve constituir um símbolo na senda intricada da verdade oculta, recompensando-nos, depois, com a alegria da solução obtida.

Os matemáticos dos séculos anteriores ocuparam-se, com apaixonado zelo, em fornecer a solução de árduos problemas particulares; eles sabiam do valor de problemas difíceis. Recordo apenas o problema da curva de queda mais rápida, posto por Johann Bernoulli. A experiência mostra, assim expôs Bernoulli, no enunciado público desse problema, que tarefas difíceis e, simultaneamente, úteis são o que mais incita os espíritos nobres ao trabalho pela ampliação do saber e assim, a exemplo de Mersenne, Pascal, Fermat e de Viviani, que como ele assim procederam, Bernoulli esperava merecer a gratidão do mundo matemático, por apresentar aos insignes analistas de seu tempo um quesito que lhes servisse de pedra de toque, para avaliarem a qualidade e aferirem o vigor de seus métodos. Ao citado problema de Bernoulli e a outros semelhantes o cálculo das variações agradece a sua origem.

Como se sabe, Fermat afirmara que, salvo em casos especiais, a equação diofantina

$$x^n + y^n = z^n$$

não admite soluções inteiras x, y, z; o problema de demonstrar essa impossibilidade oferece um exemplo contundente de quanto um problema muito especial e aparentemente insignificante pode fomentar a ciência. De fato, animado pelo conjectura de Fermat, Kummer conseguiu introduzir os números ideais e descobrir o teorema da decomposição única dos elementos de um corpo cíclico em fatores primos ideais — um teorema que, generalizado por Dedekind e Kronecker para domínios numéricos arbitrários, está hoje situado no centro da moderna teoria dos números e cujo significado lhe transpõe as fronteiras, alcançando o domínio da álgebra e da teoria das funções.

Para falar sobre um campo de pesquisa inteiramente distinto, lembro o problema dos três corpos. Ao fato de Poincaré haver decidido estudar novamente esse difícil problema e de o haver aproximado da solução devemos os fecundos métodos e os princípios de longo alcance que esse sábio descortinou à mecânica celeste, hoje também reconhecidos e empregados pelo astrônomo prático.

Ambos os quesitos citados, o problema de Fermat e o problema dos três corpos, se nos apresentam quase como polos opostos no celeiro de problemas; o primeiro, um invento livre do entendimento puro, pertencente à região da teoria abstrata dos números; o outro, imposto pela astronomia, necessário ao conhecimento de fenômenos simples e fundamentais da natureza.

Porém amiúde também sucede que o mesmo problema especial intervenha em disciplinas heterogêneas do saber matemático. Por exemplo, o problema da linha mais curta desempenha, simultaneamente, um importante papel histórico e de princípios nos fundamentos da geometria, na teoria das linhas e da superfícies curvas, na mecânica e no cálculo das variações. E quão convincentemente, em seu livro sobre o icosaedro, Felix Klein descreveu o significado de que se reveste o problema dos poliedros regulares na geometria elementar e nas teorias dos grupos, das equações e das equações diferenciais lineares.

Para trazer à luz a importância de certos problemas, devo aludir a Weierstrasz, que referiu como um destino feliz o fato de, no início de sua trajetória científica, haver encontrado um problema tão importante quanto o problema da reciprocidade de Jacobi, cujo estudo ele pôde elaborar.

Após havermos evidenciado o significado geral dos problemas em matemática, voltemo-nos à questão das fontes das quais o matemático obtém seus problemas. Certamente que os primeiros e mais antigos problemas em qualquer ramo do saber matemático dimanam da experiência e são sugeridos pelo mundo dos fenômenos externos. As próprias regras do cálculo com números inteiros foram desvendadas, em um grau inferior de cultura da humanidade, do mesmo modo que também uma criança aprende essas leis, hoje em dia, pelo método empírico. O mesmo aplica-se aos primeiros problemas da geometria: aos problemas da duplicação do cubo e da quadratura do círculo, oriundos da Antiguidade; e aos mais antigos problemas da teoria da resolução de equações numéricas, da teoria das curvas, dos cálculos diferencial e integral, do cálculo das variações, da teoria das séries de Fourier e da teoria do potencial — para não referir a abundância mais rica dos problemas próprios da mecânica, da astronomia e da física.

No entanto, pela elaboração ulterior de um ramo da matemática, animado por obter soluções, o espírito humano tem a consciência de sua autonomia: ele extrai de si mesmo problemas novos e fecundos, freqüentemente sem sugestão externa perceptível, apenas mediante combinações lógicas, generalizações e especializações, mediante disjunções e reuniões dos conceitos da forma mais feliz; e então passa ao primeiro plano como o verdadeiro interrogante. Assim surgiram o problema do número primo e os demais problemas da aritmética, a teoria das equações de Galois, a teoria dos invariantes algébricos, a teoria das funções abelianas e automorfas e assim nasceram, em geral, quase todas as questões mais sutis da teoria moderna dos números e das funções.

Entretanto, enquanto opera o vigor criativo do pensamento puro, o mundo externo torna a impor-se, inspirando-nos novas perguntas mediante os fenômenos reais e facultando-nos o acesso a novos domínios do saber matemático; e, à medida que procuramos conquistar esses novos domínios do saber para o reino do pensamento puro, encontramos amiúde as respostas de antigos problemas não resolvidos e, ao mesmo tempo, promovemos ao máximo as velhas teorias. Parece-me que sobre esse jogo, sempre repetido e alternante, entre o pensamento e a experiência repousam as analogias numerosas e surpreendentes e aquela aparente harmonia preestabelecida que o matemático tão freqüentemente percebe na formulação dos quesitos, nos métodos e nos conceitos dos diversos domínios do saber.

Discutimos brevemente ainda quais as exigências legítimas e gerais que se podem fazer na solução de um problema matemático: refiro-me, sobretudo, às exigências suficientes para mostrar a correção da resposta, mediante um número finito de passos apoiados em um número finito de premissas subjacentes ao enunciado e adequadas à sua exata formulação. Essa exigência da dedução lógica mediante um número finito de passos é apenas a exigência do rigor na argumentação. De fato, a exigência de rigor que, como se sabe, assumiu significado proverbial na matemática, corresponde a uma necessidade filosófica geral de nosso entendimento; por outro lado, somente pelo preenchimento dessa exigência, o conteúdo mental e a fecundidade do problema atingem a plena validade. Um novo problema, sobretudo, quando procede do mundo dos fenômenos externos, é como um rebento novo, que somente medra e dá frutos, se estiver cuidadosamente enxertado no tronco antigo, no território seguro de nosso saber matemático, de acordo com as regras rigorosas da arte de jardinagem.

Além disso, é um erro acreditar que o rigor na argumentação seja inimigo da simplicidade. Em numerosos exemplos, ao contrário, encontramos confirmação de que o método rigoroso também é simultaneamente o mais simples e o mais compreensível. O anseio por rigor obriga-nos mesmo a encontrar modos de inferir mais simples; também freqüentemente, esse anseio nos prepara o caminho a métodos que se desenvolvem com maior facilidade que os métodos antigos de pequeno rigor. Dessa forma, a teoria das curvas algébricas experimentou considerável simplificação e maior unidade através do método mais rigoroso da teoria das funções e da conseqüente introdução de recursos transcendentes. Ulteriormente, a prova de que as séries de potências admitem o emprego das quatro operações elementares bem como da diferenciação e da integração termo a termo e o resultante conhecimento do significado da séries de potência contribuiram consideravelmente à simplificação de toda a análise, sobretudo à simplificação da teoria da eliminação e da teoria das equações diferenciais bem como à simplificação da própria teoria através das provas de existência. Porém, o exemplo contundente de meu asserto é o cálculo das variações. O tratamento da primeira e da segunda variação da integral definida acarretou cálculos sumamente complicados e o desenvolvimento desse tópico pelos matemáticos anteriores sentiu falta do rigor exigido. Weierstrasz nos indicou o caminho para um novo e seguro fundamento do cálculo das variações. No fim de minha conferência, aludirei brevemente ao exemplo das integrais simples e duplas, no qual o prosseguimento nesse caminho implicou simultaneamente uma simplificação surpreendente do cálculo das variações, na medida em que, para provar o critério necessário e suficiente da ocorrência de máximo e de mínimo, o cálculo da segunda variação e também parte dos passos cansativos referentes à primeira variação se tornam inteiramente dispensáveis — para não referir o progresso decorrente de se excluir a restrição das variações para as quais os cocientes diferenciais da função pouco variam.

Quando apresento o rigor na demonstração como exigência para a solução perfeita de um problema, gosto simultaneamente de refutar, por outro lado, a opinião de que somente os conceitos da análise ou apenas os conceitos da aritmética sejam adequados a um tratamento inteiramente rigoroso. Considero totalmente equivocada uma tal opinião, de quando em vez defendida por pessoas eminentes; uma tal interpretação unilateral da exigência de rigor logo conduziria a ignorar todos os conceitos oriundos da geometria, da mecânica e da física, a impedir a afluência de novos materiais do mundo externo e, mesmo, como última conseqüência, a repudiar os conceitos do contínuo e de número irracional. Porém de que importante nervura vital seria privada a matemática mediante a extirpação da geometria e da física matemática! Ao contrário, penso que, onde quer que assomem conceitos matemáticos, seja do lado da teoria do conhecimento, seja da geometria, seja da teoria da ciência natural, se impõe à matemática a tarefa de escrutar os princípios que fundamentam esses conceitos e de fixá-los através de um sistema simples e completo de axiomas, de sorte que a sutileza dos novos conceitos e a sua utilidade na dedução em nenhum aspecto sejam inferiores aos antigos conceitos aritméticos.

Aos novos conceitos associam-se necessariamente também novos símbolos: escolhemo-los de tal modo que nos lembrem os fenômenos que constituíram o motivo para a formação dos novos conceitos. Assim, as figuras geométricas são símbolos para a lembrança visual da intuição espacial e como tal são empregados por todos os matemáticos. Quem sempre não experimenta simultaneamente com a desigualdade $a > b > c$ entre três grandezas a, b, c a imagem de três pontos situados um após o outro sobre uma reta como o símbolo geométrico do conceito de "entre"? Quem não recorre ao desenho de dois segmentos de reta que se intersecam ortogonalmente, quando deseja provar, com todo o rigor, um teorema árduo sobre a continuidade de funções ou sobre a existência de pontos de acumulação? Quem poderia sair-se bem, sem a figura do triângulo ou do círculo com seu centro, sem a cruz de três eixos mutuamente ortogonais ou quem desejaria renunciar à representação de um campo vetorial ou a uma família de curvas e de superfícies com a sua envoltória, que desempenha um papel tão importante na geometria diferencial, na teoria das equações diferenciais, nos fundamentos do cálculo das variações e em outros ramos do saber matemático puro?

Os símbolos aritméticos são figuras escritas e as figuras geométricas são fórmulas desenhadas e nenhum matemático poderia prescindir dessas fórmulas desenhadas como tampouco lhe são prescindíveis no cálculo a disposição dos parênteses ou o emprego de outros símbolos analíticos.

O emprego dos símbolos geométricos como rigorosos recursos ilativos pressupõe o conhecimento exato e o domínio completo dos axiomas que fundamentam aquelas figuras e com isso essas figuras geométricas podem ser incorporadas ao tesouro geral dos símbolos matemáticos e, por conseguinte, é necessária uma investigação axiomaticamente rigorosa de seu conteúdo intuitivo. Assim como não podemos ajuntar incorretamente dois números durante a adição mas antes determinar as regras de cálculo, isto é, os axiomas da aritmética, as operações corretas com números, também assim é determinado o operar com símbolos geométricos através dos axiomas dos conceitos geométricos e de seu relacionamento.

A concordância entre o pensamento geométrico e o pensamento aritmético manifesta-se também no fato de que, na investigação aritmética bem como nas considerações geométricas, perseguimos em cada momento a cadeia das operações mentais até aos axiomas. Ao contrário, sobretudo ao começarmos um problema, tanto na aritmética como na geometria, empregamos em primeiro lugar um combinar rápido, inconsciente, não definitivamente seguro, confiando em um sentimento aritmético certo do modo de operar com os símbolos aritméticos, sem os quais podemos progredir tão pouco na aritmética quanto na geometria sem a capacidade imaginativa. Como modelo de uma teoria aritmética, que opera rigorosamente com conceitos e símbolos geométricos, indico o trabalho ***Geometria Numérica***, de Minkowski (1).

Cabem ainda algumas observações sobre as dificuldades que os problemas matemáticos podem oferecer e sobre o domínio dessas dificuldades.

Freqüentemente, quando não obtemos a resposta de um problema matemático, o motivo é não havermos ainda reconhecido o ponto de vista geral do qual o problema proposto aparece apenas como um elo de uma cadeia de problemas afins. Após descobrirmos esse ponto de vista, não somente se torna acessível o problema proposto de nossa investigação mas também assim alcançamos simultaneamente a posse de um método aplicável aos problemas afins. Como exemplos servem a introdução por Cauchy dos métodos de integração complexa na teoria da integral definida e a exposição do conceito de ideal por Kummer na teoria dos números. Esse meio de descobrir métodos gerais é certamente o mais viável e o mais seguro; pois as mais das vezes é inútil procurar por métodos sem mirar um problema definido.

Acredito que, no que tratamento de problemas matemáticos, a especialização desempenhe um papel ainda mais importante que a generalização. Talvez, na maior parte dos casos nos quais buscamos debalde a resposta a uma questão, a causa do insucesso consista em ainda não termos resolvido problemas mais simples e mais fáceis que o problema proposto ou em ainda não os havermos resolvido inteiramente. Há mister descobrirmos esses problemas mais fáceis e obtermos a sua solução mediante recursos tão perfeitos quanto for possível e mediante conceitos susceptíveis de generalização. Essa receita constitui a alavanca mais importante para dominar dificuldades matemáticas e parece-me que, geralmente, nos servimos dela, ainda que inconscientemente. De vez em quando, ocorre pretendermos a solução sob hipóteses insuficientes ou com sentido inexato e, por conseguinte, não alcançarmos a meta. Impõe-se, então, a tarefa de mostrar a impossibilidade de resolver o problema sob as hipóteses dadas e no sentido exigido. Tal prova de impossibilidade já era conduzida na Antiguidade, quando se mostrava, por exemplo, que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles é incomensurável com os catetos. Na nova matemática, a questão da impossibilidade de certas soluções desempenha papel saliente e afirmamos haverem sido resolvidos satisfatoria e rigorosamente, difíceis problemas antigos, como a prova do axioma das paralelas, a quadratura do círculo ou a solução, por radicais, da equação de quinto grau, ainda que em um sentido distinto do original.

São esses fatos notáveis, ao lado de outros motivos filosóficos, que produzem em nós uma convicção, partilhada por todos os matemáticos, a qual, pelo menos até agora, ninguém corroborou com prova — refiro-me à convicção de que qualquer problema matemático determinado deva ser necessariamente susceptível de um tratamento rigoroso, que conduza quer à resposta da questão proposta quer à prova da impossibilidade de sua solução e, portanto, ao necessário malogro de todas as tentativas. Proponhamo-nos um qualquer problema definido não resolvido, como a questão da irracionalidade da constante de Euler-Mascheroni ou como o quesito da existência de uma infinidade de números primos da forma $2^n + 1$. Tais problemas nos parecem tão inacessíveis e perante eles ficamos tão perplexos — temos contudo a convicção segura de que deveremos obter a sua solução mediante um número finito de passos lógicos.

Esse axioma da solubilidade de qualquer problema é uma propriedade característica apenas do pensamento matemático ou é, talvez, uma lei geral, inerente à natureza interna de nosso entendimento, de que todas questões que ele coloque também sejam solúveis por ele ? Também em outros ciências encontramos antigos problemas que são resolvidos pela prova da impossibilidade, do modo mais satisfatório, com o maior benefício para a ciência. Recordo o problema do *perpetuum mobile*.

Após tentativas malogradas de construir um *perpetuum mobile* se investigaram, preferentemente, as condições que deveriam vigorar entre as forças naturais, se devesse ser impossível um *perpetuum mobile* [1] e essa colocação inversa da questão conduziu ao descobrimento da lei da conservação da energia a qual, por seu lado, esclareceu a impossibilidade do *perpetuum mobile* no sentido em que foi originalmente exigido.

Essa convicção da solubilidade de qualquer problema matemático representa para nós um poderoso estímulo durante o trabalho; escutamos em nós a voz constante: "Esse é o problema, procura a solução. Podes encontrá-la pelo pensamento puro; pois em matemática não existe nenhum *ignorabimus*!

É imensa a plenitude de problemas na matemática e, tão logo se resolve um problema, em seu lugar afloram inumeráveis outros. Permiti-me apontar, em seguida, como prova, certos problemas de diversas disciplinas matemáticas, de cujo tratamento se espera um avanço da ciência.

Lancemos o olhar sobre os princípios da análise e da geometria. Parece-me que os acontecimentos mais provocantes e mais significantes do último século sejam a apreensão aritmética do conceito de contínuo no trabalho de Cauchy, Bolzano e Cantor e o descobrimento da geometria não-euclidiana por Gauss, Bolyai e Lobachevski. Em primeiro lugar, chamarei vossa atenção para alguns dos problemas pertencentes a esse domínio.

[O autor apresenta vinte e três problemas e conclui sua alocução.]

Os problemas indicados são apenas problemas de demonstração; são suficientes, todavia, para evidenciar o quanto, presentemente, a ciência matemática é rica, variada e extensa e para nos impor a pergunta de se, algum dia, será iminente à matemática o que, há muito tempo, ocorreu às outras ciências, a saber, que se fragmente em ciências parciais isoladas, cujos representantes mal se entendam e cuja concatenação se torne, por conseguinte, cada vez mais frouxa. Não acredito nisso nem o desejo; segundo minha opinião, a ciência matemática é um todo indivisível, um organismo cuja vitalidade depende da concatenação de suas partes. Pois percebemos reunidos muito claramente, em toda a diversidade da matéria matemática, a identidade dos recursos lógicos, a afinidade na formação das idéias na matemática inteira e as numerosas analogias em seus diversos domínios do saber. Também notamos que, quanto mais vastamente se elabora uma teoria matemática, tanto mais harmônica e uniformemente ela conforma a sua estrutura, sendo desvendadas relações imprevistas entre ramos até então separados. Assim ocorre que a expansão da matemática, em vez de destruir o seu caráter homogêneo, o tornará significativamente mais claro.

Perguntemos ainda se, diante da expansão do saber matemático, não se tornará, finalmente, impossível ao pesquisador individual compreender todas as partes desse saber. Gostaria de indicar como resposta que, pela natureza da ciência matemática, cada progresso verdadeiro sempre anda de mãos dadas com o descobrimento de recursos mais sutis e de métodos mais simples, que simultaneamente facilitam a compreensão das teorias anteriores e removem antigos desenvolvimentos complicados; e que, na medida em que se apropriar desses recursos mais penetrantes e desses métodos mais simples, o pesquisador individual conseguirá mais facilmente orientar-se pelos diversos ramos da matemática, mais do que ocorre a qualquer outra ciência.

O caráter homogêneo da matemática permanece fundada na natureza interna dessa ciência; pois a matemática é o fundamento de todo o conhecimento metodologicamente exato. A fim de que ela cumpra plenamente esse alto destino, oxalá possais produzir, no novo século, mestres geniais e numerosos jovens exaltados com nobre orgulho.

Notas:

(1) MINKOWSKI, H. *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, 1896.

(2) Cf. HELMHOLTZ: *Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittlungen der Physik*. [*Sobre o efeito de mudança das forças naturais e as correspondentes novas indagações da física*.] Alocução proferida em Königsberg, em 1854.

Título original:

Mathematische Probleme

Göttinger Nachrichten (Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen), mathematisch-physikalische Klasse 1900, Heft 3, p. 253 - 297.

(Conferência proferida no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, aos 8 de agosto de 1900.)