

## Sobre o infinito

David Hilbert  
Göttingen  
Traduzido por Marcelo PApini

Através de sua crítica, empregada com magistral agudeza, Weierstrasz criou um fundamento firme para a análise matemática. Esclarecendo, entre outros, os conceitos de mínimo, de função e de derivada, removeu os defeitos que ainda afetavam o cálculo infinitesimal, depurou-o de todas as noções confusas sobre os infinitésimos e, dessa forma, dominou definitivamente as dificuldades nascidas desse conceito.

Graças aos métodos de inferência, fundados sobre o conceito de número irracional e, mais geralmente, sobre a noção de limite, hoje reinam na análise um acordo e uma certeza totais. E, a despeito das mais audazes e mais variadas técnicas de passagem ao limite, nas questões mais complexas concernentes à teoria das equações diferenciais e integrais, se obtém a concordância dos resultados. Toda essa harmonia constitui essencialmente um mérito da atividade científica de Weierstrasz.

Nada obstante, a fundação por Weierstrasz do cálculo infinitesimal ainda não encerrou a discussão acerca dos fundamentos da análise.

O motivo disso é que o significado de infinito em matemática ainda não foi inteiramente esclarecido. Na verdade, o infinitamente pequeno e o infinitamente grande são excluídos da análise segundo Weierstrasz, na medida em que as proposições que a eles dizem respeito são reduzidas a relações entre grandezas finitas. Porém o infinito sempre comparece nas sucessões numéricas infinitas que definem os números reais e ainda no conceito do sistema dos números reais, que é apreendido como uma totalidade presente, acabada e autônoma.

Essa apreensão exprime-se através de certas formas de inferência lógica — como quando nos ocupamos de todos os números reais que gozam de uma certa propriedade ou da existência de números reais que gozem de uma certa propriedade — exatamente as quais, sem se sujeitarem a restrição alguma, são exigidas para fundamentar a análise segundo Weierstrasz e as quais são amiúde empregadas.

Dessa forma pôde o infinito reinserir-se, às ocultas, na teoria de Weierstrasz, sem ser colhido pela agudeza de sua crítica. Portanto, é esse problema do infinito que nos incumbe escla-

recer definitivamente no sentido indicado. E assim como, nos processos de passagem ao limite do cálculo infinitesimal, o infinito, no sentido de infinitamente pequeno e de infinitamente grande, se mostrou como um mero modo de falar, também assim devemos reconhecer o infinito, no sentido de uma totalidade infinita, forma essa em que ele ainda figura nas demonstrações, como algo meramente aparente. E assim como as operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por processos finitos, os quais produzem o mesmíssimo resultado e conduzem às mesmíssimas elegantes relações formais, também assim os métodos de inferência com o infinito devem geralmente ser substituídos por processos finitos que produzam exatamente o mesmo resultado, isto é, argumentos e métodos que permitam obter fórmulas e teoremas.

O desígnio de minha teoria é produzir a certeza definitiva dos métodos matemáticos, não alcançada durante a fase criticista do cálculo infinitesimal. Portanto, minha teoria deve consumir aquilo a que Weierstrasz aspirou, ao propor um fundamento da análise, e para o que deu um passo necessário e essencial.

Mas no que tange ao esclarecimento do conceito de infinito, temos que considerar um ponto de vista ainda mais geral. Podemos reparar que a literatura matemática se encontra intensamente inundada de absurdidades e de descuidos, em sua maioria imputáveis ao infinito. Por exemplo, quando, do ponto de vista de uma condição restritiva, se exige que, na matemática rigorosa, uma qualquer demonstração admita apenas um número finito de passos. Como se fosse possível darmos um número infinito de passos!

Também antigas objeções, que há muito tempo supúnhamos resolvidas, reaparecem em novos trajes. Assim, novamente, algumas mentalidades aceitam que, mesmo que se possa introduzir um conceito sem o risco de contradições e que se possa provar isso, ainda assim não é certo o seu direito de ser introduzido. Foi exatamente essa a objeção que, a seu tempo, prevaleceu contra os números imaginários, quando se dizia: "Por meio deles não se produzirá, certamente, contradição alguma mas a sua introdução não está justificada, pois as grandezas imaginárias não existem". Ora, para verificarmos a legitimidade em introduzir um novo conceito, além de provarmos que isso não conduz a antinomias, o único critério que ainda podemos impor é a fecundidade desse novo conceito. Na verdade, a fecundidade é necessária e constitui também a mais alta instância a que nos devemos curvar.

Um outro autor parece também enxergar antinomias, fantasmas do mesmo tipo, se mesmo ninguém houver afirmado que "funcionar sem contradição" no próprio mundo físico seja considerado um pressu-

posto singular. Tenho acreditado, no entanto, que apenas proposições e suposições que conduzem a proposições através de passos, possam contradizer-se mutuamente; e a interpretação de que mesmo os fatos e os acontecimentos se coloquem em contradição me parece o protótipo do descuido.

Através desses reparos pretendi apenas mostrar que o esclarecimento definitivo da natureza do infinito constitui mais uma necessidade de um amplo domínio de interesses científicos profissionais do que um tributo à honra do próprio entendimento humano.

Desde sempre, o infinito agitou o ânimo da humanidade mais profundamente que outra qualquer questão. O infinito atuou incitante e fecundamente sobre o entendimento talvez mais que outra qualquer idéia. Porém o infinito necessita de esclarecimento mais que outro qualquer conceito.

Se agora nos propusermos a tarefa de esclarecer a natureza do infinito, então deveremos lembrar-nos, em poucas palavras, qual a conotação que, na realidade, convém ao infinito. Veremos, primeiramente, o que a física nos ensina a esse respeito.

A primeira impressão ingênua que temos dos acontecimentos naturais e da matéria é a continuidade. Perante um pedaço de metal ou um volume de um fluido, impor-se-nos-á o juízo de que eles sejam ilimitadamente divisíveis, de que uma parte qualquer deles, por menor que seja, ainda gozará das mesmas propriedades. Mas em qualquer lugar no qual se refinaram adequadamente os métodos de pesquisa na física da matéria, se encontraram limites à divisibilidade, que não decorrem da insuficiência de nossas tentativas mas da natureza das coisas. De modo que a tendência da ciência moderna pode ser compreendida francamente como uma emancipação do infinitamente pequeno e que, em vez do antigo lema "natura non facit saltus", se possa afirmar o oposto, "a natureza dá saltos".

É sabido que toda a matéria se compõe de pequenos elementos construtivos, os átomos, da combinação e da união dos quais procede toda a variedade da matéria macroscópica.

Mas a física não se deteve na teoria atômica da matéria. Junto a ela colocou-se, pelo fim do século passado, a teoria atômica da eletricidade, à primeira vista mais estranha. Enquanto até então a eletricidade passava por um fluido e a sua imagem era a de um agente que opera continuamente, agora também se mostra constituída de elétrons positivos e negativos.

Além da matéria e da eletricidade, existe na física ainda uma outra entidade autônoma, a energia, para a qual vigora igualmente a lei da conservação. Ora, como hoje se comprova, a própria energia não admite, pura e simplesmente, a fragmentação infinita sem restrições: Planck desvendou os quantos de energia.

E o resultado final, em cada caso, é que, na realidade, não se encontra em lugar algum um contínuo homogêneo que admita a divisibilidade continuada, realizando o infinitamente pequeno. A divisão infinita de um contínuo é apenas uma operação mental, apenas uma idéia, refutada mediante a observação da natureza e através dos experimentos da física e da química.

A consideração do universo como um todo constitui a segunda situação na qual nos defrontamos com o quesito da infinitude em a natureza. Nesse caso, investigamos a extensão do mundo, como se existisse um infinitamente grande.

A opinião de que o mundo fosse infinito foi dominante por muito tempo; até Kant e ainda mesmo depois dele, não havia dúvidas acerca da infinitude do espaço.

Aqui é novamente a ciência moderna, especialmente a astronomia, que aduz outra vez essa questão e que procura resolvê-la, não através dos recursos insuficientes da especulação metafísica, mas mediante motivos amparados na experiência e na aplicação das leis naturais. E foram verificadas graves objeções à infinitude. A geometria euclidiana conduz necessariamente à admissão da infinitude do espaço. Ora a geometria euclidiana representa, na verdade, uma construção e um sistema conceitual livres de contradições internas; disso, porém, não decorre que ela seja vigente na realidade. A esse respeito podem decidir apenas a observação e o experimento. Nas tentativas de provar especulativamente a infinitude do espaço passam furtivamente evidentes equívocos. Do fato de que por fora de uma parte do espaço sempre haja espaço decorre apenas que o espaço seja ilimitado mas, de modo algum, que seja infinito.

Porém finito e ilimitado são qualidades que não se excluem. A pesquisa matemática fornece o modelo natural do mundo finito na denominada geometria elíptica. E a renúncia à geometria euclidiana já não é hoje uma especulação puramente matemática ou filosófica pois também chegamos a isso por outra via que, originalmente, não se vinculava ao quesito da finitude do mundo. Einstein mostrou a necessidade de abandonar a geometria euclidiana. Apoiado em sua teoria da gravitação, ele também abordou questões cosmológicas e mostrou a possibilidade de um universo finito; e todos os resulta-

dos obtidos pelos astrônomos são inteiramente compatíveis com a suposição de um mundo elíptico .

A finitude da realidade foi assim estabelecida em duas direções: tanto para o infinitamente pequeno quanto para o infinitamente grande. Todavia pode ser verdade que o infinito possua um lugar bem justificado em nosso pensamento e que desempenhe o papel de um conceito indispensável. Observemos, pois, como o infinito se comporta na ciência matemática e, por agora, interroguemos a mais pura e mais ingênua criança do espírito humano, a aritmética. Tomemos uma qualquer da rica variedade de fórmulas elementares, por exemplo a fórmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1/6)n.(n+1).(2n+1).$$

Como podemos nela substituir  $n$  por qualquer número inteiro, por exemplo, por 2 ou por 5, então essa fórmula inclui uma infinidade de afirmativas, e isso é evidentemente sua qualidade essencial; portanto, ela fornece a solução de um problema aritmético e exige uma idéia demonstrativa própria enquanto as igualdades numéricas especiais

$$1^2 + 2^2 = (1/6).2.3.5,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = (1/6).5.6.11$$

se podem verificar pelo cálculo, não oferecendo por isso nenhum interesse essencial em si mesmas.

Obtemos uma interpretação inteiramente distinta e completamente singular e uma apreensão por princípios do conceito de infinitude por meio do método dos elementos ideais, sumamente importante e frutífero. Já na geometria elementar do plano o método dos elementos ideais encontra aplicação. Nesse contexto, somente os pontos e as retas do plano são objetos originalmente reais e efetivamente existentes. Para eles vigora, entre outros, o axioma da associação: 'Por dois pontos passa sempre uma única reta.' Disso decorre que duas retas se cortam no máximo em um ponto. Todavia, não vigora o teorema de que duas retas sempre se cortem em um ponto; pelo contrário, as duas retas podem ser paralelas. Sabemos que, introduzindo elementos ideais, quais sejam, pontos infinitamente afastados e uma reta infinitamente afastada, obtemos o teorema de que duas retas se intersecam sempre em um único ponto.

Os elementos ideais "infinitamente afastados" trazem o benefício de que o sistema das leis de associação se torna tão simples e tão claro quanto é possível. Sabemos que da simetria entre

os pontos e as retas decorre o tão fecundo princípio da dualidade na geometria.

Os números complexos imaginários, usuais na álgebra, constituem um outro exemplo do emprego de elementos ideais; aqui eles se prestam a simplificar os teoremas acerca da existência e do número de raízes de uma equação.

Em geometria, para se definir um ponto ideal em geometria, emprega-se uma infinidade de retas, a saber, retas paralelas entre si. Também assim, na aritmética superior, certos sistemas de uma infinidade de números são reunidos em um ideal de números e exatamente nisso consiste o emprego mais genial do princípio dos elementos ideais. Em geral, se isso ocorrer no interior de um corpo de números algébricos, reencontraremos as simples e bem conhecidas leis de divisibilidade, vigentes para os habituais números inteiros. Aqui já chegamos ao domínio da aritmética superior.

Aproximemo-nos agora da análise, a mais bela criatura da ciência matemática e a mais sutilmente ramificada. Sabeis o papel decisivo que o infinito aí desempenha e que a análise matemática, de certo modo, constitui uma sinfonia única do infinito.

Os avanços vigorosos obtidos no cálculo infinitesimal dependem, na maior parte, de operar com sistemas matemáticos de uma infinidade de elementos. Por ser muito fácil identificar infinito com "muito grande", logo surgiram inconsistências, os denominados paradoxos do cálculo infinitesimal, já parcialmente conhecidos na Antiguidade pelos sofistas. Foi fundamental que se reconhecesse não poderem ser imediatamente estendidos ao contexto infinito muitos teoremas válidos para o contexto finito, como 'a parte é menor que o todo', a existência de mínimo e a comutabilidade da ordem das parcelas ou dos fatores. No início desta alocução, referi que, graças especialmente à perspicácia de Weierstrasz, essas questões foram plenamente esclarecidas e que, hoje em dia, em seu domínio, a análise se tornou um regulamento infalível e, simultaneamente, um instrumento prático para o emprego do infinito.

Mas a análise, somente, não nos conduz à profunda inteligência da natureza do infinito. Pelo contrário, isso só nos foi facilitado por uma disciplina, situada mais perto do modo filosófico geral de considerar as coisas, que foi convidada a lançar uma nova luz sobre todos os quesitos concernentes ao infinito. Essa disciplina é a teoria dos conjuntos, criada por Georg Cantor. Referimo-la aqui apenas em consideração à verdadeira singularidade e à originalidade de uma de suas partes, a teoria dos números transfinitos, a qual constitui o próprio núcleo da doutrina de Cantor.

Ela me parece a mais admirável florescência do espírito matemático e mesmo uma das mais altas façanhas da atividade humana puramente intelectual. Vejamos pois em que consiste.

Se quisermos caracterizar, em poucas palavras, a nova concepção do infinito sugerida por Cantor, poderemos dizer que na análise lidamos apenas com o infinitamente pequeno e o infinitamente grande como conceitos limitantes, como alguma coisa que está tornando-se, resultando, produzindo-se, isto é, lidamos com o denominado infinito potencial. Mas o infinito propriamente dito não é isso. Ele se manifesta, quando, por exemplo, consideramos a própria totalidade dos números 1, 2, 3, 4 ... como uma unidade acabada ou quando encaramos os pontos de um segmento como uma totalidade acabada de coisas. Esse tipo de infinito é designado como infinito atual.

Já Frege e Dedekind, altamente estimados por seus estudos acerca dos fundamentos da matemática, tinham empregado o infinito atual, independentemente um do outro. Na verdade, o intuito desses estudiosos era, independentemente de quaisquer intuições ou experiências, fundar a aritmética sobre a pura lógica, a única ferramenta admissível nas deduções. Dedekind esforçou-se até em derivar a noção de número finito de modo puramente lógico, pelo emprego essencial do conceito de conjuntos infinitos, em vez de obtê-la da intuição. Porém Cantor configurou sistematicamente o conceito de infinito atual. Contemplemos os dois já citados exemplos de infinito:

(A) 1, 2, 3, 4, ...;

(B) Os pontos do segmento de 0 a 1 ou, equivalentemente, a totalidade dos números reais entre 0 e 1.

Se os considerarmos da perspectiva da pura pluralidade, perceberemos alguns fatos surpreendentes, hoje familiares aos matemáticos. Consideremos o conjunto de todos os números racionais, portanto de todas as frações  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $1/4$ , ...,  $3/7$ , .... Demonstra-se que, da perspectiva de pluralidade, esse conjunto não é maior que o conjunto dos números inteiros. Dizemos que os números racionais podem ser contados do modo habitual ou que são numeráveis. E o mesmo ocorre com o conjunto de todos os números obtidos por extração de raízes, portanto, com o conjunto de todos os números algébricos. Nosso segundo exemplo comporta-se de modo parecido. Inopinadamente, da perspectiva da pura pluralidade, o conjunto de todos os pontos de um quadrado ou de um cubo não é maior que o conjunto dos pontos do segmento de 0 a 1. E o mesmo fato também acontece com o conjunto de todas as funções contínuas. Quem pela primeira vez examinasse esse quesito poderia concluir que, da

perspectiva da pura pluralidade, houvesse apenas um único infinito. Ora, os conjuntos em ambos os nossos exemplos não são, como se diz, equíparos. Pelo contrário, o conjunto (B) não pode ser contado pois é maior que o conjunto (A). Aqui se insere o rumo característico do constructo de Cantor. Os pontos de um segmento de reta não podem ser contados, segundo o modo habitual. Mas a admissão do infinito atual não nos restringe ao modo habitual de contar nem tampouco nos constrange à estagnação. Pelo contrário, tendo contado  $1, 2, 3, \dots$ , poderemos considerar os objetos assim contados segundo uma dessas ordens definidas dos conjuntos infinitos. A exemplo de Cantor, designemos essa ordem, segundo o seu tipo, por  $w$ , de sorte que a contagem continuará com  $w + 1, w + 2, \dots$  até  $w + w$  ou  $w.2$  e, novamente,  $w.2 + 1, w.2 + 2, w.2 + 3, \dots, w.2 + w = w.3$  e, novamente,  $w.2, w.3, w.4, \dots, w.w = w^2, w^2 + 1, \dots$ , de modo que, finalmente, obteremos a tabela:

$$\begin{array}{l}
 1, 2, 3, \dots \\
 w, w+1, w+2, \dots \\
 w.2, w.2 + 1, w.2 + 2, \dots \\
 w.3, w.3 + 1, w.3 + 2, \dots \\
 w^2, w^2 + 1, \dots \\
 w^2 + w, w^2 + w.2, w^2 + w.3, \dots \\
 w^2.2, \dots \\
 w^2.2 + 2, \dots \\
 w^3, \dots \\
 w^4, \dots \\
 w^n, \dots
 \end{array}$$

São esses os primeiros números transfinitos de Cantor, os números da segunda classe numérica, como Cantor os nomeou. Chegamos a eles simplesmente pela contagem dos números que estão acima do infinito numerável habitual, isto é, através do prolongamento natural e univocamente definido da contagem habitual com números finitos. Assim como até então contamos, em um conjunto, os elementos de ordem  $1, 2, 3, \dots$ , contaremos, doravante, os elementos de ordem  $w, w+1, \dots, ww$ .

Nesse contexto, evidentemente, surge logo o quesito da possibilidade de, com esses números transfinitos, se contarem também conjuntos reais que não são contáveis, na acepção usual.

No curso dessas idéias, Cantor edificou, com o melhor sucesso, a teoria dos números transfinitos e criou para eles um cálculo perfeito. Finalmente assim, graças ao portentoso trabalho conjunto de Frege, Dedekind e Cantor, o infinito foi elevado ao trono e saboreou o instante do mais alto triunfo. O infinito alcançou, em um audacíssimo vôo, a altura vertiginosa do bom êxito.

A reação não tardou a chegar e se mostrou muito dramática. Tudo foi exatamente análogo ao que ocorreu durante o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Na alegria com os novos e ricos resultados, procedemos evidentemente de modo muitíssimo pouco crítico, no que tange à legitimidade dos métodos de inferência. Com efeito, o mero emprego das construções conceituais e dos métodos de demonstração que, gradualmente, se tornaram habituais, produziram antinomias, de início isoladas, que aos poucos se tornaram cada vez mais sutis e mais graves: são os denominados paradoxos da teoria dos conjuntos. Foi o caso especial de uma antinomia encontrada por Zermelo e Russel, cuja divulgação na comunidade matemática teve literalmente efeito devastador. Perante esses paradoxos, Dedekind e Frege renunciaram efetivamente a seu ponto de vista e abandonaram a polêmica.

Dedekind hesitou por longo tempo em permitir uma nova edição de seu notável ensaio "*Was sind und was sollen die Zahlen*" [que são e o que representam os números]. Também Frege reconheceu como errônea a tendência do seu livro "*Grundgesetze der Arithmetik*" [princípios da aritmética], consoante confessou em uma posfação. E as mais veementes agressões foram dirigidas, dos mais diversos lados, contra a doutrina de Cantor. A reação foi tão impetuosa que se ameaçaram os conceitos mais comuns e mais fecundos e os métodos de inferência mais simples e mais importantes da matemática, devendo o seu emprego ser proibido. Na verdade, não faltaram defensores do pensamento antigo. Porém as ações de defesa eram muito débeis e, além disso, não se concentraram no lugar correto da defesa. Contra os paradoxos foram recomendados muitos remédios e os métodos de esclarecimento eram muito matizados.

Devemos reconhecer que não é suportável por muito tempo a situação em que hoje nos encontramos, perante os paradoxos. Podemos perguntar-nos: Se na matemática, que constitui o modelo de certeza e de veracidade, as construções conceituais e as inferências, por todos amplamente aprendidos, ensinados e empregados, conduzem a absurdidades, então onde se encontrarão a certeza e veracidade que o pensamento matemático recusa?

Existe porém uma via plenamente satisfatória para enfrentar os paradoxos sem trair nossa ciência. São os seguintes o ponto de vista que nos permitirá encontrar esse caminho e os desejos que nos orientarão nessa busca:

(A) Desejamos perseguir cuidadosamente as construções conceituais e os métodos fecundos de inferência, onde quer que se ofereça a menor expectativa em encontrá-los. Desejamos cuidar de-

les, ampará-los e torná-los úteis. Do paraíso que Cantor criou para nós, não deverá ninguém poder expulsar-nos.

(B) é necessário outorgar à inferência, sempre, a mesma certeza, tal qual se apresenta na aritmética habitual, sobre a qual ninguém alimenta dúvidas e na qual antinomias e paradoxos decorrem apenas de nosso descuido.

Apenas se esclarecermos plenamente a natureza do infinito, será possível a conquista desse ideal.

Há pouco, verificamos que o infinito, na realidade, não se encontra em lugar algum, sejam quais forem as experiências e as observações e seja qual for a ciência a que recorramos. Ora, o pensamento acerca das coisas deverá ser tão discrepante dos acontecimentos com as coisas e deverá prosseguir tão diferente, tão afastado de toda a realidade? Pelo contrário, não é claro que, quando acreditamos reconhecer a realidade do infinito, em uma qualquer acepção, apenas nos deixamos induzir pela circunstância de termos encontrado dimensões tão enormemente grandes ou pequenas, o que tão freqüentemente ocorre na realidade? E a inferência lógica substantiva, alguma vez ela nos enganou ou nos abandonou, quando a empregamos em coisas ou em acontecimentos reais? Não, a inferência lógica substantiva é imprescindível. Ela nos enganou apenas quando aceitamos quaisquer construções conceituais abstratas, especialmente as operadas com uma infinidade de objetos.

Então, aplicamos a inferência substantiva de modo inadmissível, isto é, não atendemos a condições evidentemente necessárias ao emprego da inferência lógica substantiva. E, quanto ao reconhecimento de que tais condições existam e de que devam ser observadas, encontramos-nos de acordo com os filósofos, sobretudo com Kant. Já Kant havia ensinado — e isto constitui uma parte integrante de sua doutrina — que a matemática dispõe de um conteúdo consolidado independentemente de toda lógica e que por isso jamais poderá ser fundada apenas sobre a lógica, motivo pelo qual os esforços de Frege e de Dedekind deveriam malograr. Pelo contrário, a condição prévia ao emprego de inferências lógicas e à prática de operações lógicas é a preexistência de alguma coisa nas representações, quais sejam, certos objetos concretos extra-lógicos, presentes intuitivamente como vivência imediata anterior a todo pensamento.

A fim de que as inferências lógicas sejam certas, é necessário que esses objetos sejam perfeita e totalmente percebidos e que, simultaneamente com os objetos, sejam dadas imediata e intuitivamente a sua apresentação, a sua distinção e a sua ordem ou o

seu arranjo recíproco, como alguma coisa irreduzível ou que não prescinde de redução. Esse é o fundamento filosófico que considero necessário à matemática e, geralmente, a todo pensamento, a todo entendimento e a toda comunicação científicos. E na matemática, especialmente, são objetos de nossa consideração os próprios sinais, cuja figura, de acordo com nossa atitude, é imediatamente clara e reconhecível.

Atentemos à índole e aos métodos da aritmética finita habitual. Certamente que ela é edificada mediante construções numéricas obtidas de considerações substantivas e intuitivas. Porém a ciência matemática não se exaure, de modo algum, em equações numéricas nem tampouco é a elas redutível. Podemos afirmar ser ela um aparelho que, aplicado aos números inteiros, sempre deva fornecer equações numéricas corretas. Coloca-se então a exigência de examinarmos a estrutura do aparelho, para conhecê-lo. Dispomos, como meios auxiliares, apenas do mesmo método concretamente substantivo de considerar as coisas e da orientação finita do pensamento, tais quais foram empregados na edificação da própria aritmética, para derivar as equações numéricas. Essa exigência metodológica, na verdade, é exequível. Isto é, é possível, por métodos puramente intuitivos e finitos, exatamente como instituimos a verdade na aritmética, obter também aqueles juízos que asseguram a certeza do aparelho matemático.

Investiguemos agora a aritmética com maior precisão.

.....

Por fim, repensemos nosso tema propriamente dito e extraia-mos o produto, no tocante ao infinito, de toda nossas reflexões. Eis o resumo do resultado: O infinito não se encontra realizado em lugar algum. Não existe na natureza nem é admissível como base de nosso pensamento intelectual — uma notável harmonia entre o ser e o pensamento. Contrariando as antigas aspirações de Frege e de Dedekind, adquirimos a convicção de que, como condição prévia à possibilidade do conhecimento científico, são indispensáveis certas representações e certos juízos intuitivos e de que a lógica sozinha não é bastante. As operações com o infinito podem ser legitimadas apenas mediante o finito.

Se, de acordo com Kant, entendemos por idéia um conceito da razão que transcende toda a experiência e mediante o qual o concreto é preenchido no sentido de totalidade, poderemos dizer que ao infinito resta, pura e simplesmente, o papel de uma idéia na qual podemos acreditar sem hesitação, no quadro sugerido pela teoria que acabei de esboçar.

Para concluir, gostaria ainda de exprimir meu agradecimento a Paul Bernays pela inteligente colaboração e pela valiosa ajuda prestada, sobretudo na prova do teorema do contínuo, tanto no que tange ao conteúdo quanto no tocante à forma.

---

Título original:

Über das Unendliche

Conferência proferida em 4 de junho de 1925, por ocasião do Encontro de Matemáticos em Münster, promovido pela Sociedade Matemática de Westfalen, em memória de Karl Theodor Wilhelm Weierstrasz.

Mathematische Annalen, 95 (1926), p. 161-190.  
(Recebido em 24.6.1925.)

[O texto anterior corresponde à tradução das páginas 161-171. Nas páginas seguintes, o autor confere ao assunto um tratamento mais técnico, que me pareceu transcender o interesse inicial do leitor do presente compêndio.]