

Nota do tradutor:

Embora os autores digam não pretenderem discutir nomenclatura, cabe apontar que é completamente inadequado o qualificativo 'teórico', por eles sugerido para designar a atividade que será descrita. Por fidelidade ao texto original, esse termo foi mantido na tradução. Cabe, porém, enfatizar que o qualificativo 'especulativo' descreve com precisão o objeto sob discussão. Aliás, é esse o termo que os autores usam no início de seu resumo, quando perguntam: "A matemática especulativa é perigosa?"

"Matemática teórica": para uma síntese cultural da matemática e da física teórica

ARTHUR JAFFE & FRANK QUINN
Traduzido por Marcelo Papini

RESUMO: A matemática especulativa é perigosa ? Ações recíprocas entre a física e a matemática suscitam, com alguma força, o seguinte quesito: Embora a especulação seja o tecido da física teórica, as normas tradicionais desalentam o seu uso na matemática. A prática da especulação na matemática apresenta benefícios mas pode ter conseqüências desagradáveis e destrutivas. Exige-se prudência e o quesito deve ser considerado antes e não depois de ocorrerem danos óbvios. Atentando cuidadosamente nos riscos, propomos um ordenamento da pesquisa o qual deva permitir um papel saudável e positivo para a especulação.

A matemática moderna quase se caracteriza pelo uso de provas rigorosas. Essa prática, resultante literalmente de milênios de refinamento, trouxe à matemática uma claridade e uma fidedignidade incomparáveis a qualquer outra ciência. Mas também tornou a matemática lenta e difícil; é sustentavelmente a mais disciplinada das atividades intelectuais humanas.

Grupos e indivíduos no seio da comunidade matemática têm tentado, de quando em quando, ser menos compulsivos no que tange às minúcias dos argumentos. Os resultados têm sido diversos e, às vezes, calamitosos. Todavia, em alguns domínios contemporâneos, há novamente a tendência a basear a matemática no raciocínio intuitivo destituído de prova. Até certo ponto, esse é o modelo antigo da história sendo repetido por aqueles que não o conheceram. Mas pode, também, ser o início de mudanças fundamentais no modo segundo o qual a matemática se organiza. De qualquer modo, é vital, hoje em dia, reexaminar o papel das provas no entendimento matemático e desenvolver um contexto construtivo para essas tendências.

Começaremos com uma discussão da física, parcialmente porque alguns dos movimentos contemporâneos decorrem de uma interação com a física teórica e parcialmente porque essa discussão fornece um modelo útil a potenciais realinhamentos sociológicos. Voltar-nos-emos, em seguida, para a história da matemática, em busca de exemplos que ilustrem os benefícios e os riscos de trabalho não rigoroso. Por último, sugeriremos um ordenamento da pesquisa o qual deva permitir a coexistência de tratamentos diversos.

Teoria e rigor

Tipicamente, obtém-se informação acerca dos fatos matemáticos em duas fases. Primeiramente, desenvolvem-se discernimentos intuitivos, fazem-se conjecturas e sugerem-se esboços especulativos de justificações. Em seguida, corrigem-se as conjecturas e as especulações, que se tornam fidedignas mediante provas. Usamos o termo matemática *teórica* para o trabalho especulativo e intuitivo; referimo-nos à fase orientada por provas com a locução matemática *rigorosa*. Não desejamos envolver-nos em discussão acerca de nossa escolha de nomenclatura, por não ser esse o ponto central de nosso artigo. Não obstante, como ponto de partida, esclarecemos brevemente nossas definições de teoria e rigor.

A fase inicial do descobrimento matemático — isto é, o trabalho intuitivo e conjectural, assim como o trabalho teórico nas ciências — envolve especulações acerca da natureza da realidade além do conhecimento estabelecido. Assim, tomamos emprestado nosso qualificativo *teórico* desse uso em física. Existe um uso mais antigo do termo *teórico* em matemática, qual seja, o de designar a matemática *pura* em oposição à matemática aplicada. Esse é um uso pretérito, já não corrente, que não adotaremos.

O trabalho teórico requer correção, refinamento e validação mediante experimentos ou provas. Assim, pretendemos que o papel da prova em matemática seja funcionalmente análogo ao papel do experimento nas ciências naturais. Essa tese pode não ser familiar mas, após reflexão, deverá ser clara pelo menos aos matemáticos. As provas destinam-se a dois fins. Primeiramente, as provas provêem um modo de assegurar a fidedignidade das afirmativas matemáticas, do mesmo modo que a verificação em laboratório fornece a comprovação nas outras ciências. Em segundo lugar, o ato de encontrar uma prova revela, como subprodutos, novos discernimentos e novos dados inesperados, do mesmo modo que ocorre em laboratórios.

Os matemáticos podem até aproximar-se experimentalmente da realidade matemática melhor do que o fazem as ciências de laboratório da realidade física. Esse é o motivo do modelamento: um fenômeno físico é descrito por um modelo matemático e, então, esse modelo matemático é estudado com precisão, por ser mais acessível. Essa acessibilidade também tem conseqüências para a matemático no nível social. A matemática é dividida em subdisciplinas com muito mais refinamento que a física, porque os métodos permitiram um aprofundamento maior de sua matéria.

Ainda que o uso da prova em matemática seja paralelo funcionalmente ao experimento, não estamos sugerindo que as provas sejam denominadas matemática "experimental". Já existe um uso bem estabelecido e apropriado desse termo, a saber, recorrer a cálculos numéricos e a simulações em computador como critérios de exame de conceitos matemáticos. Com efeito, resultados de experimentos com computadores são freqüentemente apresentados de um modo a que chamaríamos teórico: propõem-se conclusões gerais fundamentadas em casos de exame e de comparações. As conclusões não são completamente

confiáveis e o esforço para prover provas reais conduzem, inevitavelmente, a detectar exceções e limitações.

Divisão do trabalho

Na física, acordamo-nos em aceitar a divisão do trabalho entre teóricos e experimentadores. Porém, somente recentemente, essa divisão se tornou clara. Até o início do século XX, havia basicamente uma comunidade de físicos. Era o ideal e, de modo geral, era a prática que as mesmas pessoas tanto especulassem acerca da teoria quanto verificassem sua especulação por experiências em laboratório.

Certamente na Europa, por volta de 1900, tornou-se claro que ocorrera uma bifurcação: havia tantos físicos concentrados somente no lado teórico de seu trabalho que se podiam identificar duas comunidades distintas [H]. Essa tendência continuou um pouco mais lentamente nos Estados Unidos. E. C. KEMBLE, que trabalhou em Harvard no domínio da teoria dos *quanta*, é geralmente considerado o primeiro americano a fazer doutoramento em física teórica pura (embora sua tese de 1917 contivesse um apêndice experimental).

A distinguibilidade entre as comunidades da física teórica e da física experimental não se deve confundir com a sua independência. A teoria é vital aos experimentadores, a fim de identificarem as provas cruciais e interpretar os dados. Os experimentos são vitais aos teóricos, a fim de corrigirem e de orientarem suas especulações. Os grupos teóricos e experimentais são instáveis e ineficientes, salvo se trabalharem aos pares, em estreita interação.

Opomos essa divisão do trabalho na física à situação vigente em matemática. Ainda é o ideal e, de modo geral, é a prática que as mesmas pessoas tanto especulem acerca dos fatos matemáticos quanto verifiquem suas especulações mediante provas rigorosas. Em outras palavras, a comunidade matemática não sofreu uma bifurcação em um ramo teórico e um ramo rigoroso. Mesmo no nível individual, raramente reconhecemos a matemática teórica como uma atividade principal adequada.

Houve tentativas de dividir dessa forma os esforços matemáticos porém tais tentativas foram quase inteiramente frustradas. Por quê ? Existe alguma coisa na matemática que invalide a analogia com a física e se oponha a tal bifurcação ? Será enfim a “matemática teórica” um oxímoro ? Ou teriam ocorrido falhas, nas tentativas passadas, que as condenaram mas que, hoje em dia, podem ser evitadas ?

Novas relações com a física

Uma nova conexão com a física está provendo grande parte da força propulsora em direção à atividade especulativa em matemática. Recentemente, sob rubricas semelhantes a ‘teoria das cordas’, ‘teoria do campo conforme’, ‘teoria topológica do campo quântico’ e

'gravidade quântica', tem havido na física uma rajada de atividade tipicamente matemática. Essa atividade foi iniciada, sobretudo, por pessoas industriadas como físicos teóricos de alta energia. Dentre esses, o mais celebrado e influente (embora não seja o mais problemático) é EDWARD WITTEN.

De um ponto de vista físico, grande parte de seu trabalho ainda não amadureceu ao ponto de serem feitas previsões observáveis acerca da natureza. Além disso, o trabalho frequentemente se refere a "modelos de brinquedo", destinados a representar apenas análogos dos fenômenos reais. E algumas de suas partes que se podem aplicar ao mundo real dizem respeito a eventos experimentalmente inacessíveis: partículas com energias incríveis, movimento na escala do universo ou criação de novos universos.

Um dos resultados da ausência de previsões é esses físicos haverem sido desconectados de sua suposta comunidade experimental: não dispõem de fontes de fatos físicos relevantes que delimitem e inspirem suas teorizações. Já que o progresso resulta da ação recíproca entre a teoria e o experimento, um grupo teórico não pode subsistir desvinculado por muito tempo. De fato, grande parte da corrente principal da comunidade física encara com desconfiança esses desenvolvimentos, por causa de seu desvinculamento com "o mundo real".

Porém esses físicos não estão deveras desvinculados. Encontraram uma nova "comunidade experimental": os matemáticos. Agora são os matemáticos quem lhes provêem novas informações confiáveis acerca dos fenômenos que estudam. Frequentemente, é a um matemático que dirigem suas especulações, a fim de estimular novo trabalho "experimental". E os bons êxitos são os novos vislumbres na matemática e não na física. O que surge não é uma nova partícula porém a descrição de representações do grupo esporádico, apelidado de monstro, usando operadores de vértice em álgebras de Kac-Moody. O que se produziu não foi uma nova teoria do campo físico mas uma nova visão dos invariantes polinomiais de nós e de laços em variedades de três dimensões, usando-se integrais de caminho de Feynman ou representações de grupos quânticos.

Esses físicos ainda estão trabalhando segundo o modo especulativo e intuitivo da física teórica. Muitos não foram educados no rigor nem se interessam por ele. Estão praticando matemática teórica. Muitos matemáticos veteranos elogiaram esse trabalho e sugeriram que ele fosse imitado. Por isso, muitos adeptos matemáticos estão tendendo a um modo mais especulativo.

Poder-se-ia concluir dessa descrição que partes da matemática já sofreram bifurcação. Esses domínios adquiriram subitamente uma comunidade teórica em plena operação, os físicos teóricos, e os matemáticos tradicionais tornaram-se a comunidade consorte de verificadores rigorosos.

Todavia, isso ocorreu sem a evolução das normas da comunidade e dos cânones de comportamento exigidos para tornar estável a nova estrutura. Sem um desenvolvimento rápido dessas normas e sem a

adoção de tais “valores familiares”, o novo relacionamento entre a matemática e a física pode muito bem ruir. Os físicos voltarão aos seus parceiros tradicionais; os matemáticos rigorosos serão deixados com uma confusão por depurar; e os matemáticos seduzidos, pelo exemplo dos físicos, a um modo mais teórico de operar serão ignorados como resultado do repuxo. Para entendermos do que se trata, iniciemos com uma olhada para o passado.

Relações antigas com a física

A rica ação recíproca entre a matemática e a física é anterior até mesmo ao reconhecimento das duas como disciplinas distintas. O labor matemático que, de certa forma, transpõe as fronteiras entre ambos os domínios é comumente designado *física matemática*, embora provavelmente seja impossível uma definição precisa. Em particular, durante os últimos noventa anos, mais ou menos, nasceu escola de físicos matemáticos em torno de pessoas como D. HILBERT, F. KLEIN, H. POINCARÉ, M. BORN e, posteriormente, H. WEYL, J. VON NEUMANN, E. P. WIGNER, M. KAC, A. S. WIGHTMAN, R. JOST e R. HAAG — pessoas educadas tanto na física quanto na matemática. Essas pessoas freqüentemente trabalharam em questões motivadas pela física mas conservaram as tradições e os valores da matemática.

Resultados decorrentes do labor dessa escola tem sido importantes, em diversas ocasiões, tanto para a matemática como para a física. Seu desenvolvimento continuou em um compasso deliberado com o acúmulo de conclusões de interesse duradouro. Alguns (dentre os muitos) exemplos recentes incluem trabalho acerca da existência da teoria dos campos quânticos e de sua compatibilidade com a teoria da relatividade; o labor de LIEB e BAXTER sobre modelos reticulados e matrizes de transferência associadas; a obra de SCHOEN e YAU sobre o teorema da energia positiva na teoria da relatividade e as suas relações com a geometria das superfícies mínimas; o trabalho de RUELLE e de outros sobre sistemas dinâmicos e turbulência; o tratamento da teoria quântica local mediante álgebra de operadores; e o prévio interesse de CONNES pela física, do qual emergiu seu labor matemático sobre fatores e, posteriormente, sobre os fundamentos da geometria não comutativa.

O quesito central aqui é o que *não* aconteceu. O labor dessa escola é caracterizado por cânones de academicidade e pelo conhecimento da literatura consentânea com as melhores tradições da matemática. Não existe ambigüidade acerca das definições, da enunciação de hipóteses ou das provas de teoremas. Trata-se da matemática rigorosa tradicional. Mesmo nessa estreita aproximação com a física, foram preservados os valores tradicionais da matemática. Os físicos matemáticos têm realmente acesso a um corpo, vasto e rico, de especulação pelos físicos teóricos. Mas essas especulações foram tradicionalmente destinadas aos físicos e não aos matemáticos.

A física teórica e a física matemática têm culturas um tanto diferentes, havendo freqüentemente uma tensão entre elas. O trabalho teórico na física não inclui, necessariamente, verificação ou

prova, já que o contacto com a realidade pode deixar-se para a experiência. Assim, a sociologia da física tende a desacreditar a prova como parte necessária ao processo teórico. RICHARD FEYNMAN costumava deleitar-se em incomodar os matemáticos por sua relutância em usar métodos que operavam mas que não podiam ser justificados rigorosamente [F, G2]. Ele considerava perfeitamente satisfatório verificar sentenças matemáticas mediante o exame de uns poucos casos bem escolhidos.

Do lado matemático, E. J. MCSHANE, certa feita, julgou o raciocínio nos argumentos físicos semelhante ao “de uma mulher capaz de rastrear seu antepassados até Guilherme, o Conquistador, com apenas duas lacunas”, sendo a atitude dele típica dos matemáticos. Existe o entendimento de que o desenvolvimento deve efetuar-se segundo um compasso internamente apropriado e que não deve ser precipitado pela extensão da visão dos físicos. MCSHANE e a maior parte da comunidade dos físicos matemáticos rejeitavam como inadequado o tratamento teórico descomprometido.

Uma nota relevante é que a maioria dos físicos teóricos guarda todo respeito por seus pares experimentais. As relações entre a física e a matemática seria consideravelmente mais fácil, se os físicos, ao invés de desdenhar dos matemáticos como inúteis teóricos compulsivos, os reconhecessem como “experimentadores intelectuais”. A atitude típica dos físicos para com a matemática é ilustrada por um excerto do livro de P. W. ANDERSON, “Aqui se trata de física teórica e, portanto, certamente que o rigor matemático é irrelevante e impossível.” ⁽¹⁾ Na verdade, o rigor matemático é exatamente tão relevante e possível quanto os dados experimentais e, assim como esses, deve ser usado sempre que estiver disponível. Nada obstante, aos estudantes de física são geralmente inculcadas noções anti-matemáticas, de sorte que, se eles se virem enredados com questões matemáticas, tenderão não apenas a ser teóricos como também a negar que seu trabalho esteja incompleto.

Nem toda a física matemática tem sido claramente matemática como a descrita acima. Por exemplo, o trabalho do físico matemático alemão K. SYMANZIK foi teórico, em sua maior parte. Foi, todavia, muito cuidadoso em não expor, injustificadamente, pretensões de rigor matemático. Na verdade, em 1968, fez uma tentativa séria em instituir uma parte importante de seu trabalho teórico em um nível rigoroso, em colaboração com o matemático S. R. S. VARADHAN. Após alguns anos, isso foi realizado por E. NELSON, OSTERWALDER, SCHRADER e outros, com conseqüências de longo alcance, vinculando a teoria quântica, a teoria das probabilidades e a mecânica estatística.

Referimos, também, duas pessoas que, por algum tempo, estiveram chamando a atenção, de um ponto de vista inteiramente teórico, para questões matemáticas de ordem geral — a saber, B. MANDELBROT e M. FEIGENBAUM. Consultem-se [G] para uma resenha popular e [Kr] para a expressão do desconforto matemático com essa atividade.

Em sua maior parte, a corrente principal da física matemática rejeitou o trabalho puramente teórico como estilo matemático válido. Não obstante, notamos que os matemáticos envolvidos nas “no-

vas relações" com a física são diferentes dos físicos matemáticos tradicionais. Os geômetras, os topólogos e pessoas que trabalham com a teoria da representação começaram a conversar com físicos. Esses matemáticos não estão habituados a tratar com a diferença nas culturas e, em sua maior parte, não reconhecem paralelos em sua própria experiência coletiva que os tornariam sensíveis aos riscos do trabalho teórico. Isso sugere uma questão: À medida que adquirem maior experiência, esses matemáticos rejeitarão também a teorização pura?

Histórias de bom êxito

Voltemo-nos para os encontros matemáticos com o trabalho teórico e comecemos com o aspecto positivo. A formulação de conjecturas é atividade matemática que, mais obviamente, não envolve prova. As conjecturas estendem-se do brilhante até o enfadonho, do impossível ao óbvio. Não são filtradas pelos editores ou pelos revisores mas pelo interesse que despertam. As melhores conjecturas inspiraram o desenvolvimento de campos inteiros. Algumas das mais famosas são a hipótese de RIEMANN, o "último teorema" de FERMAT e a conjectura de POINCARÉ. A lista dos problemas de Hilbert, de amplitude e profundidade surpreendentes, exerceram grande influência no desenvolvimento da matemática no século XX. Outros exemplos são a conjectura de ADAM em topologia, as diversas questões de SERRE, a conjectura de NOVIKOV e os axiomas de WIGHTMAN para a teoria quântica dos campos.

Algumas conjecturas são acompanhadas de minúcias técnicas ou de propostas de provas. Por exemplo, as "conjecturas de Weil" delineavam um tratamento p-ádico apoiado em uma analogia com a hipótese de RIEMANN. A implementação desse programa por GROTHENDIECK e DELIGNE foi celebrada como o máximo feito da geometria algébrica moderna. Do mesmo modo, foi festejada a prova por FALTING da conjectura de MORDELL, parte de um programa de aproximação do "teorema" de Fermat. O "programa de LANGLANDS" para se entenderem as formas automorfas constituiu um estímulo importante nesse campo e o "programa de MORI" para a investigação das variedades algébricas de três dimensões revigorou esse domínio. Foi efetuada a classificação dos grupos simples finitos, implementando-se um programa desenvolvido por GORENSTEIN.

Esses exemplos têm em comum a característica de haverem sido formulados de modo explicitamente especulativo (ou, pelo menos, rapidamente reconhecidos como especulativos, como o "teorema" de Fermat). Representavam uma meta em direção da qual se deveria trabalhar e o primeiro reconhecimento pelo feito seria claramente atribuído à pessoa que encontrasse uma prova.

Um outro tipo de atividade matemática é intermédia entre o trabalho tradicional e o teórico. Efetua-se desta forma: "Se A for verdadeiro, então X, Y e Z decorrerão" ou "Se A, então é admissível conjecturar R, S e T." Nesse caso, "A" pode ser uma conjectura matemática relevante, como a hipótese de RIEMANN. Um notável exemplo recente nesse estilo ocorre na teoria dos temas ornamentais e, há

pouco tempo, todo um seminário BOURBAKI foi dedicado à evolução da pesquisa, na teoria dos números e na geometria algébrica, baseada em conjecturas de DELIGNE e de BEILINSON [Fo]. É interessante que o grupo BOURBAKI, outrora o bastião dos matemáticos tradicionais mais conservadores, hoje em dia acolha pirâmides de conjecturas.

Está crescendo a importância da tarefa (necessariamente teórica) de apontar metas em grande escala. Estamos em uma era da grande ciência e a matemática não constitui exceção. Estima-se, por exemplo, que a classificação dos grupos simples finitos ocupe quinze mil páginas de um periódico. Outras ciências têm respondido a essa tendência pela composição de equipes colaborativas extensas e formais.

A Fundação Ciência Nacional [National Science Foundation] e, em outros países, as agências do governo têm tentado induzir a matemática ao trabalho colaborativo e interdisciplinar. É necessário reconhecermos, porém, que projetos amplos em matemática não estão centrados em uma subvenção, uma técnica ou uma máquina. São empreendidos por comunidades informais nucleadas por um programa teórico sonhador. No esforço por estudar os grupos simples finitos, o programa foi desenvolvido e coordenado por D. GORENSTEIN, que repartiu o enigma entre os membros de uma equipe informal que trabalhava nesse problema. Somente poderá ocorrer um crescimento futuro, em grande escala, de tal atividade matemática havendo a evolução de outros tantos programas sonhadores.

Contos preventivos

A maior parte das experiências com a matemática teórica tem sido menos positiva que as descritas acima. Isso é particularmente verdadeiro, quando se apresenta material incorreto ou especulativo como se fosse conhecido ou fidedigno e quando o autor reivindica reconhecimento. Às vezes, isso é um “engano honesto”; às vezes, resulta de concepções não canônicas do que seja uma prova. Erros francos são menos perigosos. Por exemplo, o “lema fundamental de Dehn”, acerca de discos duplos em variedades de dimensão três, foi proposto em 1910. Foi encontrado um erro e, até que fosse provado (por PAPAKYRIAKOPOLOS, em 1957), foi reconhecido como uma conjectura importante.

Canônes débeis de prova causam maior dificuldade. No século XVIII, o raciocínio irregular conduziu a um flagelo de problemas em análise atinentes a temas como convergência de séries e convergência uniforme de funções. Como antídoto, foi introduzido o rigor. Foi adotado, a despeito das objeções de alguns teóricos, a fim de prevenir dano mais grave.

Mais recentemente, no século XX, a “escola italiana” de geometria algébrica não evitou um sério dano: ruiu após uma geração de especulação brilhante. Vejam-se [EH, K], para discussão das dificuldades e da longa convalescência. Em 1946, a disciplina ainda era encarada com tal desconfiança que WEIL sentiu obrigado a defender seu interesse por ela. Cf. a introdução de [W].

As topologias algébrica e diferencial atravessaram diversos episódios de atividade excessivamente teórica. Em sua história [D], DIEUDONNÉ data o início da disciplina da *Analysis Situs* de POINCARÉ, em 1895. Esse “ensaio fascinante e exasperador” era extremamente intuitivo. A despeito de sua manifesta relevância, o verdadeiro desenvolvimento levou quinze ou vinte anos para começar. DIEUDONNÉ [D, p. 36] exprime surpresa com esse lento início que parece, contudo, um corolário quase inevitável de como iniciou. POINCARÉ pretendeu demais, provou muito pouco e seus métodos “audaciosos” não podiam ser imitados. O resultado foi um domínio sem vida, que teria de ser organizado, antes que pudesse crescer.

DIEUDONNÉ sugere que o raciocínio irregular é uma doença de infância de disciplinas matemáticas e afirma “... depois de 1910 ... cânones uniformes do que constitui uma prova correta se tornaram universalmente aceitos ... permanecendo *invariáveis* desde então”. Na verdade, contudo, houve muitos episódios ulteriores. O trabalho inicial de RENÉ THOM sobre variedades diferenciáveis, pelo qual recebeu a medalha Fields, foi brilhante e, de um modo geral, sólido. O trabalho mais recente sobre singularidades não foi tão firme. Sua afirmativa acerca da densidade em C^∞ das aplicações topologicamente estáveis foi apoiada em um esboço minucioso porém incompleto, posteriormente aperfeiçoado por JOHN MATHER. THOM continuou, propondo o uso da “teoria da catástrofe”, fundada em singularidades, para explicar formas dos fenômenos físicos. A aplicação era matematicamente teórica e sua, divulgação, particularmente por E. C. Zeeman, mostrou-se fisicamente controvertida.

O trabalho inicial de DENNIS SULLIVAN provê um outro exemplo. Após um início sólido, iniciou com empolgamento, na década de 1970, uma exploração brilhante e altamente aclamada porém teórica da topologia das variedades. As minúcias eram fracas e esforços sérios em torná-las consistentes conduziram a um pântano. O próprio Sullivan mudou de campo e retornou a um tratamento mais rigoroso. Esse domínio ainda parece ter mais que sua quota de provas difusas.

O “teorema da geometrização” de WILLIAM THURSTON, relativo a estruturas em variedades de HAKEN de três dimensões, é um outro exemplo freqüentemente citado. Um vislumbre grandioso, acompanhado de pressentimentos belos porém insuficientes, cuja prova nunca foi totalmente publicada. Para muitos investigadores, essa pretensão não cumprida, não foi uma inspiração mas um obstáculo.

Nesses exemplos, como no caso de POINCARÉ, os discernimentos propostos pareciam constituir a meta. Certamente que existem casos nos quais os discernimentos teóricos foram severamente criticados. A questão é que, mesmo nos melhores casos, houve efeitos colaterais desagradáveis que poderiam haver sido evitados. Vemos também que WITTEN, ao dar uma descrição heurística de uma extensão do polinômio de JONES [Wi], prosseguia em uma tradição longa e problemática, mesmo no interior da topologia.

Alguns ramos da escola russa de matemática têm tradições extensas de trabalho teórico, transmitida habitualmente através de

anúncios prematuros de pesquisa. Referimos apenas dois dentre os muitos exemplos possíveis. O primeiro exemplo diz respeito à teoria da perturbação dos sistemas hamiltonianos integráveis cujo espaço de fase seja folheado por toros invariantes. Em 1954, KOLMOGOROV anunciou que toros com frequências não ressonantes subsistem a uma perturbação e apresentou um esboço de argumento. Em retrospectiva, podemos ver que esse esboço efetivamente toca nas idéias fundamentais necessárias mas que, de modo geral, foi considerado insuficiente para permitir a reconstrução da prova. Provas completas foram obtidas por ARNOLD, em 1959, para o caso analítico e por MOSER, em 1962, para o caso suave.

O segundo exemplo é um problema com o qual um de nós esteve pessoalmente envolvido, quando tentava instituir a afirmativa, amplamente conjecturada, de que transições de fase ocorrem na teoria quântica (relativística) de campos. Em 1973, os respeitados matemáticos DOBRUSHIN e MINLOS publicaram um anúncio dessa afirmativa. Após dois anos, não havendo indicações da prova pelos russos, GLIMM, JAFFE e SPENCER retomaram seu trabalho no problema, logrando obter duas provas distintas. Alguns anos depois, DOBRUSHIN e MINLOS publicaram uma retratação de seu anúncio original.

Os problemas

Existem regularidades nos problemas encontrados nesse exemplos. Listaremos alguns deles e discuti-los-emos mais minuciosamente.

(1) O trabalho teórico, levado muito longe, extravia-se, porque lhe faltam a repercussão [feedback] e as correções fornecidas pela prova rigorosa.

(2) O trabalho ulterior é intimidado e confundido pela incerteza acerca das partes fidedignas.

(3) Frequentemente se cria um domínio morto, quando teorizadores vigorosos pretendem todo reconhecimento: há pouco incentivo para se removerem os detritos que obstruem o progresso ulterior.

O primeiro problema surpreende frequentemente os futuros teorizadores matemáticos, particularmente quando não estão inclinados a reconhecer que seu trabalho é incerto e incompleto. Mesmo na física teórica, na qual há consciência dessa possibilidade, saber quando parar é uma habilidade sutil e difícil. Teorizações errantes comprometem a credibilidade do teórico e podem também comprometer o campo, pelo mecanismo identificado no segundo problema.

O segundo problema vincula-se à incerteza da literatura. Comparada com outras ciências, a literatura matemática primária é extraordinariamente digna de confiança. São quase sempre corretos os artigos publicados em periódicos matemáticos dotados de junta de revisores, o que permite avanço regular e eficiente. Apenas uma pequena poluição por erros sérios seria suficiente para exigir dos matemáticos um investimento, muito maior que o habitual, de tempo e

de energia na verificação do material publicado. Os proveitos de uma literatura fidedigna são tão profundos, que suspeitamos ser essa a primeira força que impele a matemática ao rigor.

Quando existe incerteza acerca da confiabilidade, a questão deve ser enfrentada. Frequentemente são usadas "normas práticas". Por exemplo, os matemáticos presumem que os artigos em periódicos de física sejam teóricos. Essa suspeita estende-se a uma desconfiança para com periódicos de física matemática, cujos artigos são geralmente fidedignos (embora haja exceções perigosas). Outro critério amplamente usado é o pressuposto de que qualquer ensaio que use integrais funcionais deva ser especulativo. Um de nós apontou as dificuldades causadas aos matemáticos que tentam usar exemplos sólidos dessa técnica [J]. Esses tipos de regras não são satisfatórios, como o tratamento do *caveat emptor*, que consiste em deixar que cada artigo seja julgado por si mesmo. Os proponentes dessa última corrente citam, como exemplos bem sucedidos, os ensaios de WITTEN. Só podemos lidar com números pequenos; o infortúnio são os números grandes. Também, tornou-se agora uma norma prática comum considerar como teórico todo ensaio de WITTEN. Isso confere à obra de WITTEN um alcance menor que o merecido mas ilustra o tratamento "melhor seguro do que pesaroso" que a corrente principal da matemática tende a adotar, quando surgem dúvidas.

A falta de fidedignidade é certamente um problema da física teórica, na qual a literatura primária frequentemente se torna tão irrelevante, que é abandonada indiscriminadamente. I. M. SINGER comparou a literatura física com um quadro-negro, que deve ser apagado periodicamente. Os físicos tradicionalmente obtêm muito menos benefício dos fundamentos históricos de um problema e são menos aptos a pesquisar a literatura. A vida-média de citação de artigos em física é muito mais curta do que em matemática.

O problema do "domínio sem vida" diz respeito a reconhecimentos e a recompensas. Os pesquisadores matemáticos tradicionalmente não concedem reconhecimento duas vezes pelos mesmos resultados. Porém isso significa que, quando um teorizador reclama reconhecimento, é difícil para os investigadores rigorosos justificar o investimento de labor exigido para tornar o resultado fidedigno. Existe uma grande diferença entre "preencher as lacunas de um teorema de fulano" e "verificar uma conjectura de fulano". Matemáticos rigorosos tendem a fugir da sombra de uma grande pretensão. A regra é que o trabalho que falta seja completado, frequentemente muito mais tarde, usando-se técnicas e corolários de trabalhos sobre temas distintos que gozem de fidedignidade irrestrita.

Finalmente, acerca da última questão, muitos teorizadores bem sucedidos (pelo menos em matemática) têm uma experiência sólida em trabalho disciplinado, o qual é a fonte de sua intuição e de seu bom gosto. Não é bem sucedida a maioria dos estudantes que, sem essa experiência, tentam mergulhar impetuosamente no mundo inebriante da teoria. O insucesso em distinguir entre os dois tipos de atividade pode induzir os estudantes a tentarem imitar os aspectos mais deslumbrantes e menos disciplinados e, inevitavelmente, a termi-

narem inaptos a outra coisa que não seja manipular a gíria profissional.

Os matemáticos tendem a enfatizar o conteúdo intelectual e a ignorar a importância das questões sociais e da comunidade. *Somos* porém uma comunidade e habitualmente formamos opiniões, mesmo acerca de questões técnicas, não diretamente da literatura, mas mediante interação social. Convenções socialmente aceitas são vitais para compreensão do que lemos. O comportamento é importante e a comunidade de matemáticos é vulnerável a danos decorrentes de comportamento inadequado.

Prescrições

A comunidade matemática produziu cânones estritos de prova e de normas que desestimulam a especulação. Esses cânones são mecanismos de defesa que protegem contra as consequências mais destrutivas da especulação; eles corporificam a experiência matemática coletiva de que as desvantagens da especulação lhe excedem os proveitos. Por outro lado, vimos que, praticada com propriedade, a especulação pode ser profundamente benéfica. Talvez seja possível um tratamento mais consciente e regulado, que nos permita colher os benefícios e evitar os perigos. A necessidade de encontrar uma resposta construtiva às novas influências da física teórica nos confronta tanto com um caso importante de verificação quanto com uma oportunidade.

Os matemáticos devem ser mais receptivos ao material teórico porém com cautela e com honestidade estrita. As precauções que propomos não são novas; essencialmente são as práticas tradicionais associadas às conjecturas. Contudo, é necessária uma melhor apreciação de sua função e de seu significado. Além disso, as precauções devem ser aplicadas mais ampla e uniformemente. Coletivamente, nossa proposta pode ser encarada como medidas para evitar "a propaganda enganosa".

O trabalho teórico deve ser explicitamente reconhecido como teórico e incompleto; em particular, uma quota superior do reconhecimento pelos resultado final deve ser reservado para o labor rigoroso que convalida esse resultado.

Isso pode produzir a diferença entre um domínio sem vida e uma indústria viva. Os teóricos devem reconhecer que, no curso dos acontecimentos, o bom sucesso de sua obra depende do trabalho de uma comunidade rigorosa associada; devem respeitá-la e estimulá-la, quando for possível. Certamente em física, a comunidade concede o reconhecimento básico pelo descobrimento a investigações experimentais bem sucedidas; não são encarados como se estivessem simplesmente verificando as minúcias na rede do discernimento teórico. No nível individual, os autores matemáticos devem fazer uma escolha: ou fornecem provas completas ou devem concordar em que seu trabalho esteja incompleto e em que o reconhecimento essencial seja repartido. Os revisores e os editores devem reforçar essa distinção, a qual deve ser incluída na educação dos estudantes.

As outras sugestões dizem respeito à integridade da literatura matemática. Sempre tem sido aceitável formular conjecturas em artigos e, às vezes, têm sido publicados artigos que são inteiramente teóricos. A questão central é identificar claramente o material teórico.

No corpo de um ensaio, deve prevalecer uma nomenclatura estabelecida: no material teórico, uma palavra como *conjectura* deve substituir *teorema*; uma palavra como *predizer* deve substituir *mostrar* ou *construir*; e expressões tais como *motivação* ou *argumento de apoio* devem substituir *prova*. O ideal é que o título e o resumo conttenham um termo como *teórico*, *especulativo* ou *conjectural*.

O objetivo é dispor de emblemas que indiquem aos leitores a natureza da obra. Um emblema no título de um ensaio teórico figuraria em uma citação, o que ajudaria a limitar problemas não originais. O trabalho teórico deve ser citado como fonte de inspiração ou para justificar a significação ou para fundamentar argumentos em outros desenvolvimentos teóricos. Deve manipular-se com cuidado a citação de artigos teóricos como ingrediente estrutural de uma suposta prova rigorosa e um emblema no título indicaria, quando tal cautela fosse necessária.

Anúncios de pesquisa colocam problemas específicos. Alguns anúncios são meros sumários do trabalho que o autor concluiu e relatou. Em tais anúncios, é apropriado o uso dos termos *teorema* e *prova*. Outros descrevem resultados de argumentos que não foram minuciosamente elaborados e que, às vezes, contêm saltos de confiança que exigirão anos de esforço para serem articulados. Nesses casos, a nomenclatura tradicional dá uma imagem falsa do trabalho e não é adequada; tais anúncios, na verdade, devem ser identificados como teóricos. A análise anterior mostra que, por causa disso, a publicação de anúncios pode ser nociva e mesmo danosa à textura da matemática. Os anúncios têm funções válidas, como estabelecer reclamação de prioridade e advertir outros de novos resultados e de técnicas úteis. Portanto, procuramos diretrizes que permitam, como no trabalho teórico em geral, uso benéfico mas que restrinjam o dano potencial. A questão central parece ser a sua incorporação à literatura. Um solução é:

Anúncios de pesquisa não devem ser publicados, exceto como sumários de versões completas que foram aceitos para publicação. As citações de trabalho não publicado devem ser claramente distinguidas de anúncios e de artigos por publicar ["preprints"].

Nessa era de máquinas copiadoras e de conselhos de boletins eletrônicos, é possível a ampla distribuição de notícias sem que sejam formalmente publicadas. Resultados preliminares transculturais de amplo interesse podem ser descritos informalmente no formato da "coluna de notícias" existente em periódicos como o *Mathematical Intelligencer* ou as *Notices of the American Mathematical Society*. Portanto, a ausência de publicação formal será, quando

muito, um inconveniente menor. Notamos que esta discussão também ressalta a importância em manter a distinção entre publicação formal (submetida a um revisor) e uma carta endereçada ao boletim. A manutenção dessa distinção talvez seja o maior desafio enfrentado pelo desenvolvimento dos periódicos eletrônicos sérios.

Se essas precauções forem cuidadosamente adotadas, então qualquer periódico matemático poderá considerar a publicação de artigos teóricos. Devem ser aceitos artigos estimulantes, sem provas completas, para serem publicados como teóricos (após a apropriada troca de termos). Periódicos matemáticos teóricos será uma locução adequada. Porém exige-se cuidado. Sem a honestidade e a cautela por parte dos autores, dos editores e dos revisores, isso simplesmente conduziria a reintroduzir os problemas que, penosa e repetidamente, foram eliminados ao longo dos anos.

Nossa análise sugere que a bifurcação da matemática em comunidade teórica e comunidade rigorosa começou parcialmente mas que foi inibida pelas conseqüências da especulação inadequada. Continuará essa bifurcação? Provavelmente que sim, de qualquer forma. Porém evolverá mais rápida e menos penosamente, se as precauções forem adotadas. Nas disciplinas clássicas, ocorrerá mais lentamente, porque a especulação inteligente deve apoiar-se no domínio de minúcias técnicas existentes em provas anteriores. Nessas disciplinas, a estrutura para especular provavelmente produzirá uma saída construtiva para pessoas nominalmente rigorosas, cujas inspirações excedam sua capacidade de elaborar provas rigorosas. Outros domínios, particularmente aquele que envolvem simulações em computador, são diferentes, pois a geração e a análise de dados é uma atividade perfeitamente distinta da construção de provas. Em alguns desses ramos, já podem ser identificados teorizadores especializados que, provavelmente, proliferarão.

Em qualquer caso, a estrutura proposta provê um contexto de ação recíproca entre matemáticos e físicos teorizadores. Quer constituam ou não uma faceta permanente na comunidade matemática, os físicos poderão ser saudados como "matemáticos teóricos" em vez de serem rejeitados como matemáticos tradicionais incompetentes.

-
- (1) Esse pronunciamento é atribuído por ANDERSON a LANDAU [A, p. 132]. Continua ANDERSON: "Não é exatamente assim mas é bem perto disso." Contudo, sintomaticamente, ele se lembrou incorretamente do passo. Eis a leitura correta: "Não se tentou obter rigor matemático no tratamento, pois isso, de qualquer modo, é enganoso na física teórica, ...". [LL]

Sumário

Às vezes, as especulações energizaram o desenvolvimento na matemática; outras vezes, as especulações o inibiram. Isto decorre de a teoria e a prova não serem simplesmente "diferentes", de um modo neutro. Em particular, o insucesso em distinguir cuidadosamente entre elas pode causar danos tanto à comunidade quanto

à literatura matemática. Poder-se-ia dizer que não é matematicamente ético ignorar a distinção entre raciocínios irregulares e prova. Contudo, descrevemos práticas e diretrizes que, se forem implementadas cuidadosamente, proverão um contexto positivo para a especulação em matemática.

Agradecimento

Desejamos agradecer a muitos colegas que deram sugestões prestimosas acerca deste artigo. O primeiro autor agradece uma bolsa à Fundação John S. Guggenheim. Ambos os autores foram parcialmente subsidiados pela National Science Foundation.

Referências

- [A] P. W. Anderson, *Concepts in solids*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964.
- [D] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900 — 1960*, Birkhäuser, Basel, 1988.
- [EH] D. Eisenbud and J. Harris, *Progress in the theory of complex algebraic curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **21** (1989), 205.
- [F] R. P. Feynman, *Surely you are joking, Mr. Feynman: adventures of a curious character*, W. W. Norton, New York, 1985.
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Valeurs spéciales des fonctions L des motifs*, Séminaire Bourbaki, Exposé 751, Février 1992, pp. 1-45.
- [G1] J. Gleick, *Chaos: making a new science*, Viking Penguin Inc., New York, 1992.
- [G2] — , *Genius: the life and science of Richard Feynman*, Pantheon, New York, 1992.
- [H] G. Holton, comunicação pessoal.
- [J] A. Jaffe, *Mathematics motivated by physics*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 50, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1990, pp. 137-150.
- [K] J. Kollar, *The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 211.
- [Kr] S. G. Krantz, *Fractal geometry*, Math. Intelligencer **11** (1989), 12-16.
- [LL] L. Landau and L. Lifschitz, *Statistical physics*, Oxford Univ. Press, London, 1938.
- [M] R. McCormmach, ed., *Historical studies in the physical sciences*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
- [W] A. Weil, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1946.
- [Wi] E. H. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351-399.