

Da perspectiva de um formalista

Abraham Robinson
University of California, Los Angeles, e
Yale University.
Traduzido por Marcelo Papini

[Introdução]

O grande fascínio que a lógica matemática contemporânea exerce sobre os seus devotos decorre, em grande parte, mais da sofisticação sempre crescente de suas técnicas que de uma contribuição definitiva a nossa compreensão dos fundamentos da matemática. Todavia, as aquisições da lógica nos anos recentes são relevantes aos quesitos de fundamentação e compete ao lógico, pelo menos uma vez por outra, refletir acerca da natureza básica do seu tema e talvez mesmo relatar suas conclusões. Em uma alocução proferida a alguns anos (ref. 2), o presente autor expôs um ponto de vista acerca dos fundamentos da matemática que pode ser resumido da forma seguinte.

- (1) Não existem totalidades infinitas e qualquer pretendida referência a elas é literalmente destituída de sentido.
- (2) Isso não nos deve impedir de desenvolver a matemática segundo o estilo clássico, envolvendo o uso livre de conceitos infinitários.
- (3) Embora uma estrutura infinitária, como a teoria dos conjuntos ou mesmo a teoria numérica de Peano, não se possa considerar como fundamento último da matemática, torna-se patente que temos de aceitar pelo menos uma forma rudimentar de lógica e de aritmética como elemento comum a todo o raciocínio matemático.

Tomados em conjunto, esses três pontos de vista se podem considerar como um bom resumo da perspectiva formalista. Mais especificamente, essa perspectiva formalista

- (1) Distingue nitidamente o formalismo do realismo platônico.
- (2) Rejeita as soluções propostas por vários grupos de construtivistas.
- (3) Repele o pragmatismo sem fundo do positivismo lógico.

No presente artigo, proponho-me continuar a discussão daquela alocução (ref. 2), à luz de progressos mais recentes na teoria dos conjuntos, e debater, à guisa de réplica, questões colocadas a propósito de um ou outro dos três princípios expostos acima.

Seção 1

A crítica mais freqüentemente ouvida ao ponto de vista esposado na referida alocução (ref. 2) diz respeito ao asserto de que frases que envolvam a pretensa negação de totalidades infinitas são estritamente destituídas de sentido. Com relação a isso, deixei patente, naquela ocasião, que eu admitia a menção deliberada de que um conjunto infinito implicasse a existência de uma coleção de objetos distintos que são seus elementos, como ocorre aos conjuntos finitos. Constitui um fato experimental que, de fato, é essa a imagem de um conjunto infinito nas mentes de muitos matemáticos produtivos de nossa época e é tal tipo de imagem que me parece ilusiva. Certamente que não pretendo desacreditar o valor de teorias que, de certa forma, envolvem frases sem sentido. Contudo, talvez seja natural que um matemático se ressinta de sugestões que o despojem do sentimento consolador de que ele, assim como o físico ou o biólogo, gasta a vida na exploração de alguma forma de realidade.

Tão logo se tornou claro que os sistemas axiomáticos aceitos da teoria dos conjuntos, tais como o sistema de Zermelo-Fraenkel, eram capazes de lidar com todos os problemas dessa teoria que interessam ao matemático ativo, foi quase unânime a crença na existência de um "universo de conjuntos" único. Todavia, essa ingênua visão da situação foi severamente abalada, nos anos recentes, por dois avanços distintos. Um desses foi suscitado pela prova por Paul Cohen da independência da hipótese do contínuo e, por ora, conduziu à compreensão de que o vínculo entre a escala dos ordinais e a escala dos conjuntos de partes é tão flexível que, pelo menos presentemente, parece transcender a qualquer regra. O segundo avanço decorre da emergência de novos e diversos axiomas de infinitude. Presentemente, não encontramos argumento algum que nos obrigue a adotar ou a recusar um ou outro desses axiomas. Todavia, o platonista ortodoxo acredita que, no mundo real, um desses axiomas deve ser ou verdadeiro ou falso; assim, por exemplo, para o platonista o mundo real ou inclui ou não inclui cardinais mensuráveis. Ele pode sentir-se confiante ou não de que nesse ou em quesitos semelhantes, chegaremos finalmente a uma decisão, ainda que nenhuma decisão nos seja imposta por um argumento lógico compulsivo. E, com alguma justificação, ele pode apontar para o desenvolvimento histórico da matemática e da lógica, o qual mostra que, freqüentemente, novos princípios básicos foram sugeridos e receberam aceitação quase universal, sem que nenhum motivo lógico compelsse a isso.

De acordo com um ponto de vista enfatizado particularmente por G. Kreisel, devemos confiar pelo menos na objetividade das verdades da teoria dos conjuntos, sem nos comprometermos necessariamente com a questão da realidade das entidades dessa teoria. E, mediante reflexão madura, devemos tentar alcançar novos princípios básicos que possam abolir as lacunas abertas em nosso entendimento hodierno da matéria.

Parece-me, contudo, que, embora tal reflexão possa de fato ser útil em conduzir a uma clarificação das dificuldades presentes, isso não exclui uma solução que envolva a igual aceitação de vários tipos de teoria dos conjuntos. A essa altura, é natural lembrar o desenvolvimento histórico da geometria euclidiana, cuja analogia com os desenvolvimentos recentes da teoria axiomática dos conjuntos talvez seja mais exata do que é geralmente reconhecido. A compreensão de que o axioma das paralelas podia ser, e de fato é, independente dos outros axiomas, compreensão essa conseqüente a uma longa série de tentativas em deduzir o primeiro dos demais, não foi então encarada como assunto de interesse puramente técnico. Pois, naquela época, a geometria ainda era enxergada, segundo longa tradição, como o fundamento de toda a matemática e a "aritmetização" da análise ainda se encontrava na infância. Assim, a remoção da geometria de seu lugar preeminente, nos fundamentos da matemática, foi concomitante com, e talvez influenciada por, a emergência de outros tipos de geometria métrica como disciplinas equíparas. Não é possível estarmos agora mesmo testemunhando uma evolução análoga no caso da teoria abstrata dos conjuntos?

Seção 2

A questão dos tipos de matemática que se possam recomendar como uma ocupação que valha a pena possui um caráter inteiramente diferente. Faz parte do programa deliberado de um formalista lidar com todos os tipos de totalidades infinitas como se fossem reais e, assim, sua matemática cotidiana não difere da matemática do realista platônico. Todavia, é inconsistente aderir ao mesmo tempo tanto à visão platônica da matemática quanto à visão formalista. Por outro lado, o formalista partilha com os vários tipos de construtivistas uma desconfiança básica do infinito e, com efeito, é mais finitista que muitos dentre eles. Embora tenha optado pelo modo clássico de praticar a matemática, ele não se sente obrigado a contestar certas versões construtivistas da aritmética e da análise e bem pode admitir que elas sejam mais concretas e possuam um maior conteúdo empírico imediato. Na prática, ele pode relutar em se comprometer com a matemática intuicionista, digamos, pois acredita haver encontrado um caminho mais simples e também porque ele pode ter o sentimento incômodo de que o intuicionista, em seu desejo de recuperar a análise, tenha apesar de tudo transposto os limites do finitismo estrito, entrando no reino do infinito. Simultaneamente, o intuicionista pode crer que o matemático clássico, seja qual for a sua filosofia subjacente, está perdendo tempo em desenvolver jogos simbólicos que não se podem interpretar, sendo maior o pecado do formalista, porque esse assim procede deliberada e conscientemente.

Devemos admitir que a ausência de uma motivação intelectual satisfatória para as atividades matemáticas do formalista, do modo que é descrito neste ensaio, o coloca, efetivamente, em inferioridade, em comparação com os proponentes de outras visões filosóficas dos fundamentos da matemática. E foi sugerido que D. Hilbert, o fundador do formalismo, tinha adotado um ponto de vista mais moderado. Assim, foi dito que Hilbert tinha insistido no ponto de vista finitista apenas para estabelecer a consistência da matemática sem sombra de dúvidas e que ele não tinha pretendido fossem significativos somente os conceitos finitistas. De fato, é bem conhecido o entusiasmo com que Hilbert defendia a teoria abstrata dos conjuntos, resumido no dito de que "ninguém nos expulsará do paraíso de Cantor". Todavia, no mesmo local em que figura essa advertência, Hilbert também disse que "a infinitude não se realiza em lugar algum; não existe no mundo físico nem é admissível como fundamento de nosso pensamento inteligente - o que constitui uma harmonia notável entre o Ser e o Pensamento" (traduzido da ref. 1).

Em nossa época, conceitos infinitários e, mais particularmente, referências a totalidades infinitas (que, em nossa acepção, são destituídas de sentido) foram introduzidas deliberadamente também em metamatemática. Isso é conspícuo não apenas na teoria dos modelos, na qual esses conceitos dominam soberanamente, mas também na teoria da prova e, nos anos recentes, mesmo nas diversas generalizações da teoria da recursão. Essa é uma extensão perfeitamente natural do tratamento formalista da matemática, que já se mostrou fecundo. Todavia, a tendência foi vivamente impugnada por SKOLEM (que não é formalista), que se opôs ao uso desses métodos suspeitos no próprio campo cujo desígnio é tornar seguros os fundamentos da matemática.

Seção 3

Traçar a fronteira entre a matemática infinitista e essencialmente não interpretada, de um lado, e a matemática finitista e intuitiva, do outro lado, não é uma questão trivial. Por exemplo, o presente autor concordaria em que toda sentença universal da aritmética elementar - isto é, uma sentença em uma forma normal prenexa (*), formulada no cálculo de predicados de primeira ordem em termos de adição, multiplicação e igualdade e que contenha apenas quantificadores universais - possua um significado intuitivo direto, embora se refira a um domínio ilimitado de indivíduos. Porém já uma simples mudança de quantificadores nos pode conduzir ao reino do faz de conta. Além disso, existe a questão de quais regras da lógica pertencem à estrutura que preside a nosso pensamento finito e que é anterior ao desenvolvimento de nossas teorias formais; em outros termos, quais os tipos de argumentos que são admissíveis em nossa metamatemática básica - e dotada de significado. O positivismo

lógico, na sua forma mais consistente, sustenta que, como parte da linguagem, toda a lógica é, definitivamente, arbitrária e regulada apenas por sua utilidade em lidar com o mundo empírico. Assim, mesmo as regras mais simples do cálculo de proposições ou as leis mais básicas da aritmética, tais como a lei de comutatividade da adição, não são consideradas válidas *a priori* mas substituíveis por outros sistemas de regras com aspectos inteiramente diferentes. O quesito não é meramente a possibilidade de tais sistemas alternativos de lógica, já que a resposta a essa questão é claramente afirmativa, mas a sua utilidade como fundamento último do pensamento lógico, do mesmo modo que nossa familiar lógica bivalente e a aritmética básica. Podemos imaginar um ser (humano) inteligente que tenha uma lógica diferente da nossa em todos os níveis da hierarquia das linguagens, que, ainda assim, seja capaz de compreender nosso tipo de lógica, do mesmo modo que sejamos capazes de compreender o seu, e que seja apto a lidar com os fenômenos empíricos mais ou menos satisfatoriamente, como nós próprios? A rival mais óbvia da lógica clássica de que nos lembramos aqui - a lógica intuitiva - é inadequada, pois concorda com a lógica clássica de um formalista no nível da metamatemática concreta. Existem, contudo, outras formas de lógica, como algumas sugeridas pela mecânica quântica, que, nesse contexto, merecem consideração ulterior.

Concluindo com uma nota pessoal, embora presentemente eu não me filie à perspectiva positivista que acabei de descrever, não posso excluir a possibilidade de, algum dia, ser por ela persuadido. Igualmente, o desenvolvimento de teorias infinitistas "destituídas de sentido" podem tornar-se, no futuro, tão insatisfatórias para mim, que eu queira reconhecer a maior seriedade intelectual de alguma forma de construtivismo. Não posso, porém, imaginar que algum dia retorne ao credo do verdadeiro platonista, que enxerga o mundo do infinito atual estender-se diante dele e que acredita poder compreender o incompreensível.

Referências

1. D. HILBERT, *Über das Unendliche*, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, vol. 36, 1927, pp. 209-215.
2. A. ROBINSON, *Formalism 64*, Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science (Jerusalem), Amsterdam, 1966.

(*) Uma expressão prenexa é uma expressão fechada resultante da aplicação de uma lista de quantificadores a uma expressão que apenas contém variáveis livres. Cf. BETH, E. W. (1955).

Les fondements logiques des mathématiques. Louvain, E.
Nauwelaerts, p. 96. (N. T.)

Título original

From a formalist's point of view.
Dialectica (1969), vol. 23, n. 1.