Iniciação à teoria estocástica

Marcelo Papini

"Pour beaucoup d'esprits, une probabilité calculée à sept ou huit décimales près est beaucoup plus convaincante qu'un argument fondé sur des considérations qualitatives. Ces esprits oublient que si le calcul en question est fondé sur des éléments statistiques, qui ne sont donc pas numériquement précis, le nombre de décimales est une pure illusion. Ce nombre fait croire à la précision alors qu'elle n'existe pas. De ce point de vue, la théorie des probabilités est fondamentalement une imposture." René Thom, *in* Entretien avec René Thom, *Le Monde*, 22-23 janvier 1995.

Sumário ——

---

1 - Introdução

"Longe de ser uma necessidade lógica, a geometria euclidiana é *um fato observacional empírico* que se aplica de modo muito preciso — embora não totalmente preciso — à estrutura de nosso espaço físico." (PENROSE 1991:175)

"Les mathématiques naquirent lorsque les besoins de la vie matérielle nécessitèrent leur existence, lorsque la technique d'une société atteignit un certain niveau. Au début elles n'eurent qu'un caractère empirique, préscientifique. Puis elles s'élevèrent au niveau expérimental, au niveau d'une véritable science physique, d'une physique du nombre et des formes." (CHAPELON 1962:512)

É usual aproximar-se a matemática da lógica, opondo-a às ciências empíricas. Não seria difícil rastrear essa perspectiva até Platão e conduzi-la por um percurso quase ininterrupto, que passa por Immanuel Kant, a Bertrand Russell e Gottlob Frege, no início do século XX. Mas não é esse o escopo do presente escrito.

O presente autor advoga que a matemática tem raízes empíricas e que sua separação da física foi condicionada socialmente.

Tampouco discutir essa tese é o escopo do presente escrito mas, para que esse asserto não pareça gratuito, remeterei o leitor aos autores seguintes, que professam opinião semelhante.

Heródoto de Halicarnasso vincula a origem do conhecimento geométrico às exigências da agrimensura, pois as inundações periódicas do rio Nilo teriam obrigado os arpedonaptas a retraçar os limites dos lotes agrícolas, medida essa indispensável à cobrança dos tributos devidos ao faraó. Notemos que o vocábulo grego *geometria* corresponde etimologicamente ao nosso *agrimensura* (ALEXANDRE 1901: 222, 307; BAILLY 1950:274, 400; COOLIDGE 1940:25). Alguns autores indicam a estrutura social da antiga Hélade como o principal motivo de se haverem convertido em uma disciplina altamente racional as técnicas geométricas empíricas usadas no antigo Egito, patentes na edificação das portentosas pirâmides:

> "La structure de la société grecque est la base matérielle du goût des Grecs pour l'abstraction, pour la ratiocination. Il est juste de dire qu'elle fut aussi la base de leur rationalisme, de leur confiance dans la puissance du raisonnement pur pour atteindre la vérité, de leur admirable technique de la démonstration, et ce dernier point devait être d'une importance fondamentale pour le développement ultérieur des mathématiques." (CHAPELON 1962:514)

MEHRTENS (1976:314-315) informa como o advento de um novo modelo de universidade provocou na Alemanha a separação entre as denominadas ciências puras e ciências aplicadas:

> "By the beginning of the nineteenth century, a new social class had become dominant. In consequence of this change, the system of education was modified and strengthened. The French revolution led to the establishment of the *École Polytechnique* and the *École Normale* which were of enormous significance in the history of mathematics. France was the center of mathematics and science at the turn of the century, it was the model for scholars in other countries. The German university reform, starting with the foundation of the university of Berlin (1809), merged traces of the French model with specifically German philosophical ideas and, most important, was an attempt to establish the autonomy of scholars without violating the boundaries set by the political state of the German countries. The scientists did not take part in the reform; still it turned out to be very favourable to the development of mathematics and natural sciences. The main point is that the teaching was done to students who could stay at the university to become professors of mathematics. The institutional background was provided by the *Institute* and *Seminare* that were founded during the century. Thus the mathematicians could teach the mathematics they were themselves working on.
>
> These developments influenced the relation of pure and applied mathematics in many ways. First, the connection of mathematics to technology was cut off by the separation of *Technische Hochschulen* and universities. Thus, for instance, descriptive geometry disappeared from the university curriculum. Secondly, the model of the foundation of *Seminare* was the *mathematisch-physikalisches Seminar* of Königsberg; its fourth follower, the important *Seminar* of Berlin, was already purely mathematical. The institutional structure tended to separate fields, and thus pure mathematics was favoured. Thirdly, the teaching of students as potential mathematicians had two effects: On one hand, the mathematicians could teach things they were interested in, and the teaching got swiftly up to the level of actual research, thus forming a strong tradition. On the other hand, the mathematicians turned their professional interest to the things they were

teaching, and thus became more concerned about the elementary partes of their discipline."

A despeito da propalada separação epistêmica ou metodológica entre a matemática e a física, o exame da história revela diversos pesquisadores como Isaac Newton (1643–1727), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Carl Gauss (1777–1855), William Hamilton (1805–1865), Henri Poincaré (1854–1912), David Hilbert (1862–1943), Hermann Weyl (1885–1955) e Roger Penrose (1931 –), para citar apenas os mais conhecidos, que ignoraram a distinção epistêmica apontada pelos filósofos das ciências e que deixaram decisiva contribuição tanto à matemática quanto à física.

Aliás, deve consignar-se, *en passant*, que também são empíricas as raízes da lógica, a qual foi criada na Academia platônica, com apoio na observação dos métodos usados pelos geômetras que a freqüentavam.

O escopo do presente escrito é apresentar um esboço didático de introdução à teoria estocástica, o qual se preste a exibir como se constrói uma disciplina matemática, desde o exame de fatos empíricos até a sua consolidação sob a forma axiomática, evidenciando que a axiomatização constitui o fim de um trajeto e jamais o seu início. Esse tema será discutido no item 2.2 (a construção da teoria).

A escolha da estocástica foi ditada pelas razões seguintes:

(a) Trata-se de uma teoria cujas raízes empíricas estão suficientemente documentadas, ao contrário da geometria e da aritmética, cujas origens se escondem nas brumas do passado. Quem quiser investigar as origens empíricas, por exemplo, do cálculo com frações não deverá furtar-se a estudar cuidadosamente a obra coletiva *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, de Paul BENOIT, Karine CHEMLA e Jim RITTER (1992), que contém cerca de duas dezenas de estudos sobre frações, mostrando, entre outras coisas, como a técnica fora praticada no antigo Egito e na China.

(b) Os primeiros capítulos da estocástica são tão elementares, que podem ser expostos no curso secundário.

(c) Embora as técnicas necessárias à elaboração dos rudimentos da estocástica já fossem anteriormente conhecidas, ela somente foi constituída, quando o contexto cultural o impôs. Esse tema será retomado no item 2.2 (a construção da teoria). Constitui, portanto, um exemplo claro de que a matemática, por se produzir no seio da sociedade humana, não está imune aos condicionamentos culturais.

(d) Tão logo a estocástica adquiriu uma formulação consistente, foi requerida por outras ciências empíricas, sequiosas de ferramentas adequadas para investigação de seus respectivos campos e para a expressão de muitos de seus resultados. Desse modo, a estocástica tornou-se relevante tanto à tomada de decisões quanto a estudos epistêmicos. Esse tema, que é afim ao modelamento de uma teoria empírica, será comentado no item 2.2 (a construção da teoria).

No item 3 será apresentada a proposta de iniciação à teoria estocástica, que pode ser usada, como leitura introdutiva, no ensino secundário. Na sua redação, o presente autor obedeceu fielmente ao princípio didático de que o aprendizado por cada sujeito deve reproduzir, em linhas gerais, o aprendizado pela espécie humana (análogo ao aforismo de que a ontogênese replica a filogênese). Assim, a construção da teoria apoiar-se-á em exemplos, dos quais se extrairão as propriedades consideradas fundamentais.

---

2 – A teoria estocástica

2.1 – Considerações preliminares

> "Qualquer gênero da Matemática que se vai afastando de sua fonte empírica ou que, em uma segunda ou uma terceira geração, esteja apenas indiretamente inspirada por idéias provenientes da realidade, confronta-se com perigos muito graves. Torna-se cada vez mais puramente estetizante, cada vez mais puramente *l'art pout l'art*. Isto não será necessariamente mau, se o gênero vertente estiver cercado por assuntos correlatos que ainda mantenham estreitas relações empíricas ou se tal ramo se encontrar sob a influência de pessoas dotadas de percepção extremamente bem desenvolvida. Existe, contudo, o perigo de que a matéria se desenvolva segundo a linha de menor resistência, que seja arrastada para longe de sua fonte e que se fragmente em um uma diversidade de espécies insignificantes, transformando o gênero em uma massa desarticulada de minúcias e complexidades. Em outras palavras, a uma grande distância de sua fonte empírica ou após uma elaboração abstrata interna, um gênero matemático corre o perigo de degenerescência. Usualmente, no início, o estilo é clássico; o sinal indicativo de perigo são os indícios de que o estilo se está tornando barroco. Em qualquer circunstância, sempre que essa fase é alcançada, o único remédio que julgo eficaz é o retorno rejuvenescedor às fontes, é a reinjeção de idéias empíricas. Estou convencido de que essa é uma condição necessária a que o gênero conserve o frescor e a vitalidade. E creio que isso é válido, não apenas agora, mas também no futuro." (NEUMANN, J. von. *The mathematician*. In: NEWMAN, J. R. (1956) *The world of mathematics*. New York, Simon and Schuster. [Apud MAIA, L. P. Mequita (1977). *Mecânica Clássica*, volume 2, 1977]

Há poucas décadas, designaram-se conjuntamente *estocástica* (subentendendo-se *teoria*) a antiga teoria das probabilidades (que, nos países de expressão alemã, era nominada cálculo da verissimilitude: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*) e os aspectos matemáticos da estatística.

O termo *estocástica* fora usado na Antiguidade, na acepção de *arte da conjectura*. O termo *stokhastikós* encontra-se, por exemplo, no diálogo platônico *Philebos*, para denotar a capacidade de conjecturar. O vocábulo reapareceu no título da obra póstuma (1713) de Jakob Bernoulli, *Ars conjectandi sive stochastice*, na qual o autor pretendeu medir, com a possível precisão, a verissimilitude das coisas. Foi reintroduzido na linguagem erudita, em 1917, por Ladislaus von Bortkiewicz.

Como data de nascimento da estocástica aceita-se, geralmente, o ano de 1654, no qual Blaise Pascal e Pierre de Fermat, através de cartas, trataram de problemas associados a jogos de azar. Mas não foi essa a primeira vez que se discutiram problemas dessa natureza. Já em 1494, foi impresso um compêndio sobre a arte de calcular, *Summa de arithmetica* ..., da autoria de Luca Pacioli. Nesse manual, o autor afirmava que, se fossem necessários seis pontos para se ganhar um jogo e dois jogadores interrompessem uma partida, quando um deles tivesse cinco pontos e o outro tivesse dois pontos, a quantia apostada deveria ser repartida entre os jogadores na proporção de 5 para 2 (DAVIS & HERSH 1988:25; GARDING 1997: 268-269)

Talvez logo os primeiros investigadores tenham percebido que essa assertiva não seria aceitável. De fato, se fossem necessários nove pontos para se ganhar um outro jogo e os jogadores interrompessem uma partida nas condições referidas, o princípio adotado por Luca Pacioli forneceria a mesma resposta, contrariando nossa percepção de que a situação mudou. A primeira solução convincente foi conhecida, depois que o Cavaleiro de Méré propôs esse problema a Pascal. Pascal lhe respondeu que cada jogador deveria receber uma parcela proporcional a oportunidade que ele tivesse de ganhar a partida, no instante em que ela fosse interrompida. Para que esse princípio fosse eficaz, seriam necessárias ferramentas que permitissem o cálculo de tal oportunidade. Foi sobre isso que Pascal e Fermat se cartearam e dessa discussão epistolar nasceram os fundamentos da estocástica, expostos por Christian Huygens, em 1657, na obra intitulada *De ratiociniis in ludo aleae*. Segundo a descrição de Poisson: “Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l’origine du calcul des probabilités.” (EVES 1997: 365-366; GARDING 1997: 269; STEWART 1991: 52; STRUIK 1987: 103.)

Mas o interesse da humanidade pelos fenômenos fortuitos certamente não é tão recente. Por se haverem encontrado dados de forma quase cúbica em túmulos no antigo Egito e na Caldéia, se supõe que o jogo de azar já fosse praticado por povos antigos (PICHARD 2005: 14-15). Tais dados foram, às mais das vezes, fabricados com astrágalos, ossos do tarso, de forma quase cúbica, o que nos leva a conjecturar que o curso da evolução do esqueleto dos primates foi determinante na escolha do poliedro que seria usado nos jogos de azar.

Os hebreus recorriam à sorte, para decidirem acerca da divisão de um terreno, para atribuírem funções e para buscarem culpados (Van den BORN 1971:1459). Informa também esse autor (1971:1079) que “acontecimentos imprevistos eram interpretados como indícios da vontade divina”, porque se acreditava que tudo o que ocorre é assim determinado por Javé. Talvez seja essa a origem do ordálio, método usado na Idade Média para instruir a sentença judicial, segundo o qual um acusado era submetido a condições dolorosas ou perigosas, sendo o resultado considerado como julgamento divino.

Também na mítica grega, há referências às decisões pela sorte. Por exemplo, os três filhos de Hércules, após haverem conquistado a península do Peloponeso, dividiram-na em três partes e as sortearam. Em oposição ao fortuito, o espírito grego reconheceu a necessidade, que foi personificada em Ananque [Ἀναγγη] a qual, na teogonia órfica era irmã da justiça, Dique [Δικη]. No mito platônico *A república*, Ananque é a mãe das Moiras, que representam o destino pessoal de cada ser humano. (Cf. GRIMAL 1951:102b, 300b, 310b-311a.)

COURTEBRAS (2005:209) distingue, no pensamento grego, duas modalidades de destino, que são incompatíveis com a noção de casualidade: o destino segundo os escritores trágicos e o destino segundo os estóicos.

O paradigma do destino trágico encontra-se na trilogia "*o rei Édipo, Édipo em Colono* e *Antígone*", de Sófocles. Nessa narrativa, a casualidade não desempenha papel algum mas o destino é inexorável, sendo diante dele impotentes os próprios deuses olímpicos. Por outro lado, entre os estóicos, embora inelutável, o princípio que distribui o destino a cada um é a razão universal, o *logos*, que não atua casualmente mas segundo uma diretriz. (COURTEBRAS 2005:110).

Na sua *Física* (II 4,5 6), Aristóteles distinguiu entre os eventos contingentes, que se produzem necessariamente, e os eventos fortuitos, de ocorrência incerta (PICHARD 2005:13-14).

Parece que em Roma se praticavam tão obcecadamente os jogos de azar, que foram editadas leis contra as casas de jogos. PICHARD (ibidem) refere que se encontraram dados viciados, o que nos leva a supor que já houvesse o reconhecimento claro de que, em condições de perfeita simetria, todas as faces de um dado propendem a ocorrer com iguais freqüências.

A incipiente igreja cristã foi herdeira da concepção de providência divina, que já se esboçava na cultura hebraica. Segundo esse conceito, Deus governa toda a natureza e cuida de suas criaturas. Por considerar a providência divina como a manifestação contínua do amor e da vontade divinas (van den BORN 1971:1236), essa concepção pode haver sido um dos motivos que levaram a igreja cristã, desde os seus primórdios, a condenar os jogos de azar (PICHARD 2005:15) e, conseqüentemente, a postergar o nascimento da estocástica.

Os primeiros escritos sobre a teoria estocástica, dos quais temos notícia, remontam ao século XVII mas apenas foram publicados no século seguinte. Trata-se das obras de Giròlamo [Hyeronimus] Cardano e de Galileo Galilei. Cardano, em seu *Liber de Ludo Aleae* (escrito antes de 1576 e publicado em 1663), que consiste em trinta e dois breves capítulos, estuda especificamente os jogos de dados e os jogos de cartas.

Talvez se possa concluir que, antes de a estocástica haver sido constituída, já os jogadores houvessem acumulado um acervo significativo de resultados experimentais. Assim, os objetivos precípuos dessa teoria seriam explicar os fatos já conhecidos e prever novos resultados. Os fatos conhecidos podem haver sido consignados em termos de freqüências relativas, o que permitiria aos jogadores orientar-se na proposição de apostas.

De fato, entre os problemas resolvidos por Cardano (e, posteriormente, também por Galilei) figura o seguinte: “Três dados são jogados simultaneamente e os resultados obtidos em cada um deles são somados. O número de partições de nove em três parcelas é igual ao número de partições de dez em três parcelas. Mas, experimentalmente, a freqüência relativa de ocorrência de nove é menor que a freqüência relativa de ocorrência de dez.” (Cf. FERNANDEZ 1973:30, n. 15.)

Concluiremos a presente seção, transcrevendo um excerto de PICHARD (2005:14–15):

> “On peut alors se poser deux questions: pourquoi la théorie des probabilités a-t-elle porté d’abord sur les jeux de pur hasard (lancers de pièces, de dés...) et non sur d’autres phénomènes aléatoires de la vie économique par exemple, et pourquoi cela est-il survenu si tardivement ? En effet, les outils mathématiques utilisés par les inventeurs de cette théorie sont très simples et étaient connus dès l’antiquité grecque pour l’arithmétique et le calcul des proportions et le Moyen-Age pour les combinaisons; ainsi, dès cette époque, l’appareillage mathématique pour une telle théorie était disponible.
>
> Sur le premier point, on peut remarquer que les jeux de hasard pur (où l’adresse des joueurs n’intervient pas) sont les plus simples conceptuellement et qu’ils sont faciles à modéliser; Pascal a écrit à ce propos que cette théorie pourrait “s’arroger à bon droit ce titre étonnant: *Géométrie du hasard*” dans son Adresse de 1654 à l’Académie Parisienne *Le Pailleur* (qui faisait suite à l’académie de Mersenne). Ce sont des problèmes de ce genre qui ont été développés en premier, à l’encontre de l’hypothèse de Maistrov qu’une science se développe pour répondre à des besoins économiques.
>
> Sur le second point, une première raison est qu’un traité scientifique sur les jeux de hasard ne fait peut-être pas très sérieux, le jeu étant chose futile aux yeux des savants. Une autre raison, certainement plus importante, est que le résultat d’un tirage au «sort» est l’expression de la volonté divine et, comme telle, on ne doit pas calculer dessus, on ne doit pas tenter Dieu (ou le Diable); cette attitude existe encore actuellement avec les attitudes superstitieuses de joueurs. C’est peut-être une raison pour laquelle l’Eglise catholique avait prohibé les jeux de hasard.”

2.2 - A construção da teoria

> "Um ramo do saber será vigoroso, enquanto oferecer problemas em abundância; a falta de problemas significa marcescência ou fim da evolução autônoma. A pesquisa matemática precisa de problemas, assim como todo empreendimento humano persegue metas. É mediante a resolução de problemas que o pesquisador tempera a sua força; ele encontra novos métodos e perspectivas e alcança um horizonte mais amplo e mais livre." David HILBERT (1900). *Mathematische Probleme*. (Conferência proferida no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, aos 8 de agosto de 1900.)

O primeiro tratado sobre a nova disciplina, escrito por Christian Huygens, foi publicado em 1657, sob o título *De ratiociniis in ludo aleae*. Huygens inicia com a tentativa de formalizar a noção de *direito de esperar*, a qual encontrou em Pascal, sob o nome de '*valeur de la chance*': "*Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée.*" Esse tratado permaneceu a única obra importante em estocástica até o início do século XVIII, talvez porque, naquela época, os matemáticos estivessem ocupados em elaborar o cálculo infinitesimal, inventado por Leibniz, e o método equivalente das fluxões e das fluentes, inventado por Newton; talvez, também, por se julgar, então, que a estocástica não se pudesse empregar nas ciências (cf. PICHARD 2005:24).

Cabe assinalar que nem Fermat, nem Pascal, nem Huygens trataram da noção de *probabilidade* mas de *oportunidades* ou '*chances*'. O termo francês *chance* proveio do latim vulgar [não comprovado] *cadentia*, do qual proveio o português *cadência* e corresponde, no latim clássico, a *alea*, *casus* ou *fortuna*. O termo probabilidade pertence à família do vocábulo latino *probus*, do qual derivam as palavras portuguesas *probo*, *ímprobo* e *provar*. Foi introduzido na jurisprudência, na Idade Média, no contexto do exame de provas, indícios materiais e testemunhos, pois, consoante a notoriedade ou a autoridade moral da testemunha, o testemunho apresentaria menor ou maior peso. Nesse contexto, a *probabilidade* correspondia ao grau de credibilidade atribuída a uma opinião ou ao julgamento de um fato. Seria *provável* uma opinião atestada por todas as autoridades morais ou religiosas; por extensão, por numerosas autoridades; por deslizamento, por uma única autoridade. Daí a doutrina do *probabilismo*, que considera impossível atingir-se a certeza e recomenda satisfazer-se com o que for *mais provável*.

Karl Popper supôs que o termo *probabilis* tenha sido inventado pelo romano M. T. Cícero, para traduzir diversos termos usados pelos estóicos e pelos cépticos, tais quais πιθανοσ, πιθανε e πιστιν, e cita o seguinte excerto ciceroniano: "Essas são as coisas que creio dever qualificar como prováveis [*probabile*] ou semelhantes à verdade [*veri simile*]." (POPPER 1994:440)

O termo *probabilidade*, na acepção que hoje lhe atribuímos, foi introduzido, pela primeira vez, na *Arte de Pensar*, redigida por Arnauld & Nicole e denominada *Logique de Port-Royal*. Essa arte de pensar foi estruturada segundo os quatro aspectos do pensamento racional: compreender, julgar, deduzir e ordenar. Essa obra, que seria usada como manual durante todo o século XVIII, institui a caracterização (interna e externa) e as propriedades lógicas das proposições certas ou impossíveis. Em seguida, os autores tratam das proposições incertas, especificamente dos testemunhos sobre eventos da vida comum ou extraordinários. A essas proposições incertas é atribuída uma probabilidade, o seu grau de credibilidade. (Cf. PICHARD 2005:24-26)

Mas, mesmo nesse texto, ainda se encontra a oposição entre a concepção medieval e a concepção de proporção:

> "[...] a fim de decidirmos o que devemos fazer para obtermos algum bem ou evitarmos algum mal, é necessário considerar não apenas o bem ou o mal em si mesmos mas também a probabilidade de que ele ocorra e enxergar geometricamente a proporção de todas essas coisas tomadas conjuntamente". (Apud EAGLE 2004:371)

Considera-se que Huygens foi o primeiro a examinar a aplicação do cálculo estocástico a outros domínios que os dos jogos de azar. Estudou a esperança da vida humana, apoiado em dados recolhidos em Londres, em conexão com os problemas das rendas e das anuidades. (LANIER 1995:261)

Na já citada *Ars conjectandi*, publicada em 1713, Jakob Bernoulli operou um deslizamento progressivo do cálculo das expectativas de Huygens para o cálculo das probabilidades. Terminou por definir a probabilidade como o grau de certeza com o qual se pode produzir um acontecimento futuro. A *Ars conjectandi* consiste em quatro partes. A primeira parte é uma reprodução, anotada e comentada, do tratado de Huygens. A segunda parte é uma compilação sistemática de técnicas de enumeração (permutações e combinações). A terceira parte aplica os resultados precedentes aos jogos de azar. E a quarta parte colima a extensão da teoria a outros domínios, tais quais os negócios civis, morais e econômicos, extensão essa fundada no enunciado e na demonstração de um teorema que seria designado lei dos grandes números por Denis POISSON, nas *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837).

O escopo de Bernoulli era estudar os argumentos que se podem usar na arte de conjecturar e como lhes estimar os pesos para suputar as probabilidades. Para isso distinguiu entre dois tipos de situações aleatórias.

A primeira situação é a dos jogos de azar, na qual as probabilidades são inferidas 'a priori' dos dados mais ou menos explícitos da experiência aleatória. Bernoulli propôs como modelo para descrever tal situação uma urna com bolas coloridas. Nesse caso, a resolução do problema se reduz à aplicação das técnicas de enumeração (compiladas na segunda parte de sua obra).

A segunda situação é a das experiência aleatórias nas quais a probabilidade será definida 'a posteriori', mediante a repetição do experimento por um número de vezes muito grande. Antes de considerar exemplos extraídos de outros domínios, Bernoulli retomou o modelo da urna, supondo que não se lhe conhecesse a composição. Bernoulli supôs que, à medida que crescesse o número de experimentos, a freqüência relativa da ocorrência de um dado evento convergiria a sua probabilidade mas, cautelosamente, introduziu a noção de intervalo de confiança, definido pelos valores mínimo e máximo das freqüências relativas associadas a diversos do experimento. (LANIER 1995:262)

Foi nessa quarta parte da obra, que Bernoulli propôs a noção de probabilidade epistemológica, que representava a elaboração de uma teoria não aditiva e que foi absorvida pela concepção aleatória dos jogos de azar, cuja preeminência impôs a teoria aditiva da probabilidade. Os sucessores de Bernoulli, iniciando por MONTMORT e DE MOIVRE, mantiveram a identificação dos conceitos de probabilidade e de sorte, adquirindo o termo uma conotação associada aos aspectos aleatórios dos fenômenos. O recurso a técnicas matemáticas conduziu à quase extinção do que se nomeava probabilidade epistemológica. (CERRO 2006:3-6)

Após MONTMORT e de MOIVRE, a teoria apresentou intensa maturação. Paralelamente, a partir de estudos sobre hidrodinâmica conduzidos por Daniel Bernoulli (sobrinho de Jakob), em 1738, desenvolveu-se a teoria cinética dos gases. Clausius deu-lhe decisiva contribuição, ao introduzir o conceito de velocidade de difusão de um gás, que pode exprimir-se através os coeficientes macroscópicos de difusão, iniciando uma prática que se tornou fecunda, pois grandezas macroscópicas são diretamente observáveis. O passo seguinte foi dado por Maxwell, que incorporou à Física diversos recursos da teoria das probabilidades, sendo seguido nessa prática por Boltzmann que, de 1872 em diante, empreendeu reduzir a termodinâmica à mecânica, mediante a hipótese do caos molecular, que imprime nova orientação ao cálculo das probabilidades (ANDRADE 2002:173-168).

Boltzmann enfrentou forte oposição por um significativo segmento de físicos, cujo mais forte argumento consistia em notar que as leis da mecânica são reversíveis enquanto não o são as leis da termodinâmica, sendo essa irreversibilidade traduzida no conceito de entropia, cujo crescimento é postulado na Segunda lei. Boltzmann retrucou, sustentando que os processos dissipativos são irreversíveis, por ser extremamente pequena a probabilidade de um estado muito afastado do valor máximo.

Mas dizer que é muito pequena a probabilidade de um evento não equivale a dizer que tal evento não ocorrerá. Esse quesito, que já fora discutido por Antoine Cournot (1843), voltou à tona, a propósito da aguda crítica que se fazia à formulação para termodinâmica proposta por Boltzmann. Presentemente, denomina-se princípio de Cournot à afirmativa de que é fisicamente impossível um evento cuja probabilidade seja extremamente pequena. (Cf. SHAFER & VOVK 2005:11-12.)

Considerou-se esse problema tão relevante, que foi incluído por David Hilbert entre os problemas propostos durante o Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, aos 8 de agosto de 1900, sob a rubrica tratamento matemático dos axiomas da física [*mathematische Behandlung der Axiome der Physik*]: "A investigação dos fundamentos da geometria nos propôs insistentemente a tarefa de tratar axiomaticamente, segundo esse modelo, aqueles ramos da física, nos quais, hoje em dia, a matemática desempenha um papel proeminente, entre os quais avultam o cálculo das probabilidades e a mecânica. [*Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon* *heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik*.}

Parece significativo que Hilbert houvesse considerado o cálculo das probabilidades como um ramo da física.

Nos primeiros decênios do século XX, foram propostas algumas axiomatizações para a estocástica, que refletiam as visões de seus autores. Usualmente, distinguem-se três concepções: a clássica, a freqüencial e a subjetiva. (Cf. ZOCCANTE 2005:5)

A concepção clássica deriva do trabalho de Fermat e Pascal, segundo a formulação de Laplace, para quem a probabilidade de um evento era a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (pois a esses últimos se atribui a mesma probabilidade). Nessa definição se reconhece a influência da sua origem (jogos de dados e de cartas), nos quais, por simetria, se consideravam todos os eventos elementares como equiprováveis.

A concepção freqüencial já se manifestou no problema enfrentado por Cardano e Galilei: A freqüência relativa de ocorrência da soma dez era maior que a freqüência relativa de ocorrência da soma nove, o que parecia em desacordo com a expectativas correspondentes. Segundo a concepção freqüencial, se a freqüência relativa de um evento não convergir à probabilidade calculada segundo algum modelamento do fenômeno estudado, então tal modelamento deverá ser substituído por outro.

Na concepção subjetiva, a probabilidade é definida como o grau de confiança que um observador tem de que tal evento ocorra. Obviamente, esse conceito não modifica o cálculo da probabilidade nas situações em que existe regularidade (como lançamentos de dados ou de moedas) mas se torna mais adequado a situações, como a gestão de empresas, nas quais as decisões pessoais são determinantes mas não se podem reduzir ao exame de freqüências.

A primeira das axiomatizações dignas de nota foi a de Richard von Mises (1919), às quais se seguiram diversas outras, entre as quais a proposta por Karl Popper (1938), que sofreu várias modificações até atingir a forma publicada em 1956. Mas a comunidade preferiu a formulação de Andrei Kolmogorov (1933). A axiomatização que será construída no item 3.2, apoiando-se nos exemplos concretos, aproxima-se da proposta de Kolmogorov.

Presentemente, a estocástica é usada para o modelamento de diversos fenômenos, tanto na física quanto na genética. Também é usada como fundamento da teoria dos jogos. Resumidamente, a teoria dos jogos trata das situações de conflito, isto é, das situações nas quais diversos sujeitos perseguem objetivos distintos e nas quais o resultado final depende de decisões tomadas por cada sujeito. Dizemos que o jogo é competitivo, quando o bom êxito de um sujeito implica o mau êxito dos outros. Essa teoria foi fundada por Oskar Morgenstern e Janos von Neumann, em 1944. Posteriormente, John Nash introduziu a teoria dos jogos competitivos, baseada no conceito de jogos com estratégia mista que progridem ciberneticamente em um círculo lógico em direção a um ponto de equilíbrio que otimiza os resultado para todos os jogadores. Pelas correções e extensões da teoria de von Neumann, Nash ganharia o prêmio Nobel de Economia de 1994.

Se aceitarmos o juízo de que o estudo das leis naturais pode ser visto como um jogo, no qual a natureza procura ocultar os segredos e os investigadores tentam desvendá-lo, poderemos aplicar a estocástica não apenas como instrumento de descrição do saber mas como ferramenta para construí-lo (cf. HEGENBERG 1976:165).

---

3 - Rudimentos da teoria estocástica

Primeiro protótipo —

Consideremos uma turma com a seguinte composição:

12 estudantes nascidos em Salvador (S),
6 estudantes nascidos na Feira de Santana (F),
4 estudantes nascidos na Cachoeira (C),
3 estudantes nascidos nas Barreiras (B).

Essa turma consistirá em estudantes distribuídos segundo as proporções seguintes:

B: 3/(3 + 4 + 6 + 12) = 3/25 = 12%

C: 4/(3 + 4 + 6 + 12) = 4/25 = 16%

F: 6/(3 + 4 + 6 + 12) = 6/25 = 24%

S: 12/(3 + 4 + 6 + 12) = 12/25 = 48%.

Verifica-se facilmente que a composição dessa turma goza de uma propriedade inerente a qualquer distribuição desse tipo, qual seja, é igual à unidade a soma das proporções de todos os componentes da turma.

Nesse exemplo, 3/25 + 4/25 + 6/25 + 12/25 = 1 ou, equivalentemente, 12% + 16% + 24% + 48% = 100%.

À expressão desse fato chamaremos propriedade A.

Suponhamos, em seguida, que um estudante dessa turma seja escolhido aleatoriamente para representa-la junto à Diretoria da escola vertente.

Para efetuar tal escolha aleatória, podemos supor que dispomos de uma urna com vinte e cinco bolas idênticas, numeradas de 1 a 25, e associadas aos componentes da turma, listados na ordem alfabética. Dizer que um estudante será escolhido aleatoriamente equivale a dizer que uma bola será retirada da urna por um processo que não envolva volição.

Por admitirmos que a atribuição de números às bolas não lhes modifica as propriedades físicas (tais quais o volume e o peso), podemos dizer que a expectativa de que seja escolhida uma qualquer dentre elas se possa medir pela proporção de 1 para 25. Equivalentemente, dizemos que essa é a expectativa de que seja escolhido um qualquer dentre os estudantes que integram a turma referida. O conjunto de todas as escolhas de um estudante dessa turma será designado pela locução espaço amostral.

A cada escolha de um estudante dessa turma chamaremos ponto do espaço amostral. A qualquer parte do espaço amostral chamaremos evento e diremos que um evento é elementar, se ele consistir em um único elemento.

Nesse exemplo, notamos que todos os eventos elementares apresentam a mesma expectativa. À propriedade de que todos os eventos de um espaço amostral exibam a mesma expectativa chamaremos eqüidade.

Diremos que dois eventos são incompatíveis, quando eles não podem ocorrer concomitantemente.

Exemplo 1 —

Sejam E_1 = {ser escolhido o primeiro estudante da lista} e E_2 = {ser escolhido o segundo estudante da lista}. Se estivermos examinando a escolha de um único estudante, os eventos E_1 e E_2 serão incompatíveis.

Por outro lado, a expectativa de que ocorra a reunião dos eventos E_1 e E_2 será a soma das respectivas expectativas, isto é, $p(E_1 \cup E_2) = 1/25 + 1/25 = 2/25$.

Esse exemplo nos leva a formular a propriedade B: A expectativa de que ocorra a reunião de dois eventos incompatíveis é a soma das expectativas desses dois eventos.

Exemplo 2 —

Sejam E_B = {ser escolhido um estudante nascido nas Barreiras}, E_C = {ser escolhido um estudante nascido na Cachoeira}, E_F = {ser escolhido um estudante nascido na Feira de Santana} e E_S = {ser escolhido um estudante nascido em Salvador}. Se ainda estivermos examinando a escolha de um estudante, os eventos E_B, E_C, E_F e E_S serão incompatíveis.

Decorre do primeiro exemplo e da propriedade A que a expectativa de que ocorra o evento E_B é 3/25, o que será representado por $p(E_B) = 3/25$.

Pelos mesmos motivos, $p(E_C) = 4/25$, $p(E_F) = 6/25$ e $p(E_S) = 12/25$.

O exame desse resultado nos conduz à formulação da propriedade C: A soma das expectativas de todos os eventos incompatíveis (de um mesmo espaço amostral) é igual à unidade.

Essa propriedade C fornece outro modo de se calcular a expectativa do complementar de um evento H. De fato, seja H o evento {ser escolhido um estudante que nasceu nas Barreiras, na Cachoeira ou na Feira de Santana}. Ora, podemos calcular p(H) como 3/25 + 4/25 + 6/25 = 13/25. Por outro lado, notando que H = {ser escolhido um estudante que não nasceu em Salvador} = $\complement E_S$, podemos escrever que $p(H) = p(\complement E_S) = 1 - p(E_S) = 1 - 12/25 = 13/25$.

Problema 1 ––

Dada uma urna que contém duas bolas verdes, três bolas brancas e quatro bolas azuis, sejam os eventos E_V = {ser extraída uma bola verde}, E_B = {ser extraída uma bola branca} e E_A = {ser extraída uma bola azul}. Calcule as expectativas $p(E_A)$, $p(E_B)$, $p(E_V)$ e calcule, por dois procedimentos, $p(E_A \cup E_B)$.

Segundo protótipo ––

Na discussão do exemplo anterior, verificamos que a expectativa da reunião de eventos incompatíveis é a soma das expectativas dos eventos considerados (propriedade B). Essa propriedade suscita outro quesito: Como se deve calcular a expectativa da interseção de dois eventos? O exame da seguinte situação fornecerá uma resposta clara.

Consideremos duas urnas, das quais a primeira contém uma bola branca e duas bolas verdes e a segunda contém três bolas azuis e cinco bolas purpurinas, e efetuemos a extração de duas bolas, uma da primeira urna e outra da segunda urna.

Para descrever o espaço amostral correspondente a esse experimento, recorreremos ao conceito de produto cartesiano S x T de dois conjuntos S e T. Lembramos que tal conjunto consiste nos pares formados por um elemento do primeiro conjunto (S) e por um elemento do segundo conjunto (T). O exame desse produto cartesiano é conduzido facilmente mediante a tabela seguinte, na qual os eventos elementares serão descritos pelas iniciais das cores das bolas extraídas. Poderemos supor que a extração se fará sucessivamente e que a primeira letra indica o evento correspondente à primeira urna, enquanto a segunda letra representa o evento correspondente à segunda urna.

	A	**P**
B	BA	BP
V	VA	VP

A fim de, coerentemente com os resultados já obtidos, atribuirmos expectativas aos eventos elementares que compõem esse espaço amostral, notemos que, na primeira urna, vigoram as expectativas:

$p(B) = 1/3$ e $p(V) = 2/3$;

enquanto, na segunda urna, $p(A) = 3/8$ e $p(P) = 5/8$.

Ora, de acordo com a propriedade C, como são incompatíveis os eventos elementares do novo espaço amostral, será igual a 1 a soma das respectivas expectativas.

Mas $1 = 1 \times 1 = (1/3 + 2/3).(3/8 + 5/8) =$

(1/3).(3/8) + (1/3).(5/8) + (2/3).(3/8) + (2/3).(5/8).

Isso nos conduz a atribuirmos aos eventos elementares as expectativas seguintes, em harmonia com a propriedade C:

p(BA) = (1/3).(3/8) = 3/24

p(BP) = (1/3).(5/8) = 5/24

p(VA) = (2/3).(3/8) = 6/24

p(VP) = (2/3).(5/8) = 10/24.

Assim, obtivemos uma nova propriedade, a que chamaremos propriedade D: A expectativa de dois eventos sucessivos é o produto das respectivas expectativas.

Esse princípio tanto nos permite estudar a composição de experimentos distintos (como a extração de bolas de urnas distintas) quanto experimentos que consistem na repetição de um mesmo experimento.

Exemplo 3 ——

Com os dados do problema 1 enunciaremos um novo problema ou, equivalentemente, definiremos um outro espaço amostral, para descrevermos o experimento de se extraírem, sucessivamente, duas bolas da urna considerada. Para identificarmos esse espaço amostral, usaremos novamente o produto cartesiano do espaço amostral do problema 1 por si mesmo, construindo a tabela seguinte:

	A	**B**	**V**
A	AA	AB	AV
B	BA	BB	BV
V	VA	VB	VV

Notemos que, no cálculo das expectativas associadas aos eventos elementares, consideraremos as mudanças introduzidas na composição da urna pela extração da primeira bola. De fato, a urna consiste, inicialmente, em nove bolas. Mas a extração de uma bola reduz o número total das bolas bem como o número de bolas que têm a mesma cor que a bola extraída. Baseados nesse fato, podemos atribuir as seguintes expectativas aos eventos elementares do espaço amostral descrito:

p(AA) = (4/9).(3/8) = 12/72

p(AB) = (4/9).(3/8) = 12/72

p(AV) = (4/9).(2/8) = 8/72

p(BA) = (3/9).(4/8) = 12/72

p(BB) = (3/9).(2/8) = 6/72

p(BV) = (3/9).(2/8) = 6/72

p(VA) = (2/9).(4/8) = 8/72

p(VB) = (2/9).(3/8) = 6/72

p(VV) = (2/9).(1/8) = 2/72

(Observemos que a soma das expectativas a todos os eventos elementares é igual à unidade.)

Elaborada essa tabela, que descreve exaustivamente o espaço amostral considerado, poderemos responder a quaisquer perguntas a respeito dele. Por exemplo:

- A expectativa de que sejam extraídas duas bolas com a mesma cor: 12/72 + 6/72 + 2/72 = 20/72. Logo, é maior que a expectativa de que a primeira bola seja verde mas é menor que a expectativa de que a primeira bola seja branca.
- A expectativa de que sejam extraídas duas bolas com cores distintas: 12/72 + 8/72 + 12/72 + 6/72 + 8/72 + 6/72 = 52/72 ou, mais facilmente, 1 - 20/72 = 52/72.
- A expectativa de que exatamente uma bola seja verde: 8/72 + 6/72 + 8/72 + 6/72 = 28/72.
- A expectativa de que pelo menos uma das bolas seja verde: 28/72 + 2/72 = 30/72.
- A expectativa de que nenhuma das bolas seja verde: 1 - 30/72 = 42/72.
- A expectativa de que a segunda bola seja azul: 12/72 + 12/72 + 8/72 = 32/72 = 4/9 (resultado que pode causar surpresa, por coincidir com a expectativa de que a primeira bola seja azul).

Problema 2 ——

Com os dados relativos à turma considerada no primeiro protótipo, suponha que serão escolhidos, sucessiva e aleatoriamente, dois estudantes para representá-la junto à Diretoria da escola e calcule as expectativas dos seguintes eventos:

- Os estudantes escolhidos haverem nascido na mesma cidade.

- Os estudantes escolhidos haverem nascido em cidades distintas.
- Exatamente um estudante haver nascido em Salvador.
- Exatamente um estudante não haver nascido em Salvador.
- O segundo estudante haver nascido em Salvador.

Terceiro protótipo ——

Ainda com os dados do problema 1 enunciaremos um terceiro problema ou, equivalentemente, definiremos um terceiro espaço amostral, para descrever o experimento de se extraírem, sucessivamente, três bolas da urna considerada. Para identificarmos esse espaço amostral, recorreremos novamente ao conceito de produto cartesiano, neste caso, do espaço amostral do segundo protótipo pelo espaço amostral do problema 1.

	A	**B**	**V**
AA	AAA	AAB	AAV
AB	ABA	ABB	ABV
AV	AVA	AVB	AVV
BA	BAA	BAB	BAV
BB	BBA	BBB	BBV
BV	BVA	BVB	BVV
VA	VAA	VAB	VAV
VB	VBA	VBB	VBV
VV	VVA	VVB	VVV

Notando agora que também a extração da segunda bola produz mudanças na composição da urna, podemos atribuir as seguintes expectativas aos eventos elementares do espaço amostral descrito:

$$p(AAA) = (4/9).(3/8).(2/7) = 24/504$$

$$p(AAB) = (4/9).(3/8).(3/7) = 36/504$$

$$p(AAV) = (4/9).(3/8).(2/7) = 24/504$$

$$p(ABA) = (4/9).(3/8).(3/7) = 36/504$$

$$p(ABB) = (4/9).(3/8).(2/7) = 24/504$$

$$p(ABV) = (4/9).(3/8).(2/7) = 24/504$$

$$p(AVA) = (4/9).(2/8).(3/7) = 24/504$$

$$p(AVB) = (4/9).(2/8).(3/7) = 24/504$$

p(AVV) = (4/9).(2/8).(1/7) = 8/504

p(BAA) = (3/9).(4/8).(3/7) = 36/504

p(BAB) = (3/9).(4/8).(2/7) = 24/504

p(BAV) = (3/9).(4/8).(2/7) = 24/504

p(BBA) = (3/9).(2/8).(4/7) = 24/504

p(BBB) = (3/9).(2/8).(1/7) = 6/504

p(BBV) = (3/9).(2/8).(2/7) = 12/504

p(BVA) = (3/9).(2/8).(4/7) = 24/504

p(BVB) = (3/9).(2/8).(2/7) = 12/504

p(BVV) = (3/9).(2/8).(1/7) = 6/504

p(VAA) = (2/9).(4/8).(3/7) = 24/504

p(VAB) = (2/9).(4/8).(3/7) = 24/504

p(VAV) = (2/9).(4/8).(1/7) = 8/504

p(VBA) = (2/9).(3/8).(4/7) = 24/504

p(VBB) = (2/9).(3/8).(2/7) = 12/504

p(VBV) = (2/9).(3/8).(1/7) = 6/504

p(VVA) = (2/9).(1/8).(4/7) = 8/504

p(VVB) = (2/9).(1/8).(3/7) = 6/504

p(VVV) = (2/9).(1/8).(0/7) = 0/504 = 0

Descrito esse espaço amostral, poderemos responder a qualquer pergunta a respeito dele. Por exemplo, a expectativa de que sejam extraídas:

- Bolas da mesma cor: 24/504 + 6/504 + 0 = 30/504 = 5/84
- Uma bola de cada cor: 24/504 + 24/504 + 24/504 + 24/504 + 24/504 + 24/504 = 144/504 = 24/84
- Exatamente duas bolas com a mesma cor: 1 – (5/84 + 24/84) = 55/84

Comentário 1 ––

O método que adotamos para descrever cada espaço amostral e calcular as expectativas dos respectivos eventos elementares mostrou-se eficiente porém extremamente incômodo. Para nos convencermos disso, será suficiente notar que, se quiséssemos estudar quatro extrações feitas na urna considerada, teríamos que considerar oitenta e um (= 3^4) eventos elementares.

Um método alternativo depende do uso de técnicas de enumeração mais poderosas. De fato, examinando a tabela anterior, distinguiremos três categorias de eventos elementares: (a) Eventos nos quais as três bolas extraídas apresentam a mesma cor. (b) Eventos nos quais são extraídas exatamente duas bolas de uma mesma cor. (c) Eventos nos quais as três bolas extraídas apresentam cores distintas.

Examinemos detidamente cada categoria.

(a) p(AAA) = (4/9).(3/8).(2/7) = 24/504

p(BBB) = (3/9).(2/8).(1/7) = 6/504

p(VVV) = (2/9).(1/8).(0/7) = 0

Portanto, a expectative de que sejam extraídas bolas da mesma cor é (24/504) + (6/504) = 30/504 = 5/84.

(b) Evento AAB —— Apresenta três permutações: AAB, ABA, BAA. Logo,

p{AAB, ABA, BAA} = 3.(4/9).(3/8).(3/7) = 108/504

Evento AAV —— Apresenta três permutações: AAV, AVA, VAA. Logo,

p{AAV, AVA, VAA} = 3.(4/9).(3/8).(2/7) = 72/504

Evento BBV —— Apresenta três permutações: BBV, BVB, VBB. Logo,

p{BBV, BVB, VBB} = 3.(3/9).(2/8).(2/7) = 36/504

Evento BBA —— Apresenta três permutações: BBA, BAB, ABB. Logo,

p{BBA, BAB, ABB} = 3.(3/9).(2/8).(4/7) = 72/504

Evento VVA —— Apresenta três permutações: VVA, VAV, AVV. Logo,

p{VVA, VAV, AVV} = 3.(2/9).(1/8).(4/7) = 24/504

Evento VVB —— Apresenta três permutações: VVB, VBV, BVV. Logo,

p{VVB, VBV, BVV} = 3.(2/9).(1/8).(3/7) = 18/504

Portanto, a expectativa de que sejam extraídas exatamente duas bolas de uma mesma cor é 108/504 + 72/504 + 36/504 + 72/504 + 24/504 + 18/504 = 330/504 = 55/84.

(c) Evento ABV — Apresenta seis permutações. Logo,

p{ABV, BVA, VAB, AVB, VBA, BAV} = 6.(4/9).(3/8).(2/7) = 144/504

Portanto, a expectativa de que as três bolas tenham cores distintas é 144/504 = 24/84.

Podemos conferir a coerência do cálculo, notando que 5/84 + 55/84 + 24/84 = 1.

Exemplo 4 —

Efetuemos a descrição do experimento de se extraírem, sucessivamente, quatro bolas daquela mesma urna, que contém duas bolas verdes, três bolas brancas e quatro bolas azuis. Consideraremos as seguintes categorias de eventos elementares nesse novo espaço amostral:

Quatro bolas da mesma cor:

- p(AAAA) = (4/9).(3/8).(2/7).(1/6) = 24/3024
- p(BBBB) = (3/9).(2/8).(1/7).0 = 0
- p(VVVV) = (2/9).(1/8).0.0 = 0

Exatamente três bolas de uma mesma cor:

- AAAB → Admite quatro permutações.
  p{BAAA, ABAA, AABA, AAAB} = 4.(4/9).(3/8).(2/7).(3/6) = 288/3024
- AAAV → Admite quatro permutações.
  p{VAAA, AVAA, AAVA, AAAV} = 4.(4/9).(3/8).(2/7).(2/6) = 192/3024
- BBBA → Admite quatro permutações.
  p{ABBB, BABB, BBAB, BBBA} = 4.(3/9).(2/8).(1/7).(4/6) = 96/3024
- BBBV → Admite quatro permutações.
  p{VBBB, BVBB, BBVB, BBBV} = 4.(3/9).(2/8).(1/7).(2/6) = 48/3024
- VVVA → Admite quatro permutações, todas com expectativa nula.
- VVVB → Admite quatro permutações, todas com expectativa nula.

Duas bolas de uma cor e duas bolas de outra cor:

- AABB → Admite seis permutações.
  p{AABB, ABAB, BAAB, BABA, BBAA, ABBA} =

6.(4/9).(3/8).(3/7).(2/6) = 432/3024.

- AAVV → Admite seis permutações.

  p{AAVV, AVAV, VAAV, VAVA, VVAA, AVVA} =

  6.(4/9).(3/8).(2/7).(1/6) = 144/3024.

- BBVV → Admite seis permutações.

  p{VVBB, VBVB, BVVB, BVBV, BBVV, VBBV} =

  6.(2/9).(1/8).(3/7).(2/6) = 72/3024.

Duas bolas de uma cor e duas bolas de cores distintas:

- AABV → Admite doze permutações.

  p{AABV, BAAV, BVAA, AAVB, VAAB, VBAA, ABAV, BAVA, ABVA, AVAB, VABA, AVBA} = 12.(4/9).(3/8).(3/7).(2/6) = 864/3024

- BBVA → Admite doze permutações.

  p(BBVA, ...} = 12.(3/9).(2/8).(2/7).(4/6) = 576/3024

- VVAB → Admite doze permutações.

  p{VVAB, ...} = 12.(2/9).(1/8).(4/7).(3/6) = 288/3024

Podemos verificar a coerência do cálculo, notando que 24 + 288 + 192 + 96 + 48 + 432 + 144 + 72 + 864 + 576 + 288 = 3024.

Comentário 2 —

Nesse modelamento de fenômenos estocásticos, consideramos eventos sucessivos nos quais a composição das urnas é modificada no curso do experimento. Tais eventos são denominados extrações sem reposição. Mas existem eventos que podem ser arbitrariamente repetidos, sem que as condições iniciais se modifiquem, tais quais o lançamento de um dado ou de uma moeda. (Obviamente, estamos supondo dados e moedas ideais, que não se desgastem com o passar do tempo.)

De posse dessas primeiras noções, já podemos resolver o problema discutido por Cardano e Galilei e referido no item 2.1: “Três dados são jogados simultaneamente e os resultados obtidos em cada um deles são somados. O número de partições de nove em três parcelas é igual ao número de partições de dez em três parcelas. Mas, experimentalmente, a freqüência relativa de ocorrência de nove é menor que a freqüência relativa de ocorrência de dez.” (Cf. FERNANDEZ 1973:30, n. 15; MORGADO et alii 1991:6.)

Confirmemos que o número de partições de nove em três parcelas é igual ao número de partições de dez em três parcelas. Lembremo-nos de que os dados hexaédricos apresentam seis faces. Logo,

9 = 1 + 2 + 6 → seis permutações

9 = 1 + 3 + 5 → seis permutações

$9 = 1 + 4 + 4 \rightarrow$ três permutações

$9 = 2 + 2 + 5 \rightarrow$ três permutações

$9 = 2 + 3 + 4 \rightarrow$ seis permutações

$9 = 3 + 3 + 3 \rightarrow$ uma permutação

Total: vinte e cinco permutações.

$10 = 1 + 3 + 6 \rightarrow$ seis permutações

$10 = 1 + 4 + 5 \rightarrow$ seis permutações

$10 = 2 + 2 + 6 \rightarrow$ três permutações

$10 = 2 + 3 + 5 \rightarrow$ seis permutações

$10 = 2 + 4 + 4 \rightarrow$ três permutações

$10 = 3 + 3 + 4 \rightarrow$ três permutações

Total: vinte e sete permutações

De fato, os números nove e dez admitem o mesmo número (seis) de partições distintas em três parcelas. Contudo, as partições do número nove admitem vinte e cinco permutações enquanto as partições do número dez admitem vinte e sete permutações. Por outro lado, três dados podem cair de duzentos e dezesseis ($6 \times 6 \times 6$) modos distintos. Logo, a expectativa de ocorrência da soma nove é 25/216 enquanto a expectativa de ocorrência da soma dez é 27/216. A diferença entre as duas expectativas é de ordem menor que 1%, o que motivou o seguinte comentário por FERNÁNDEZ (1973:30, n. 15): "Note-se que a diferença é pequena, 1/108, o que dá idéia da experiência desses jogadores [que propuseram o problema a Cardano]."

Adquirida a familiaridade com esses fenômenos aleatórios, já podemos elaborar uma axiomatização. Doravante, a fim de tornar a exposição semelhante aos textos disponíveis, usaremos o termo *probabilidade* em substituição ao termo *expectativa*.

Aos teóricos que se debruçaram sobre os fenômenos aleatórios causava profundo desconforto o uso de tantos vocábulos estranhos à matemática, tais quais *urna, bola, dado, moeda* e *extração*. Sentiram maior comodidade no recurso ao vocabulário conjuntual, que será empregado doravante. A expressão calcular a expectativa de um evento será considerada um sinônimo da locução atribuir um número a uma parte de um conjunto previamente definido. Tal conjunto será denominado espaço amostral e designado por A. Mas tal número deve atender a dois requisitos fundamentais: não ser negativo e não ser maior que a unidade.

Além disso, deve haver certa coerência na associação entre as partes de A e as respectivas probabilidades. Vimos que, se dois eventos forem incompatíveis, a expectativa de sua reunião será a soma das respectivas expectativas. Ora, dizer que dois eventos são incompatíveis significa que não podem ocorrer simultaneamente. (Na descrição anterior, a reunião de eventos incompatíveis era indicada pela conjunção OU.) Mas dizer que dois eventos não podem ocorrer simultaneamente equivale a dizer que em sua interseção não existe ponto algum, isto é, que sua interseção é vazia. Usaremos, pois, essa propriedade para definir os eventos incompatíveis, isto é:

Diremos que dois eventos E e F (de um mesmo espaço amostral A) são incompatíveis, se $E \cap F = \varnothing$.

Para facilitar a exposição, introduziremos um termo suplementar:

Diremos que uma família $D_1, D_2, \ldots, D_n$ constitui uma decomposição do espaço amostral A, se dois quaisquer membros dessa família forem disjuntos e se a reunião dessa família coincidir com o espaço amostral A, isto é, se

- Dados dois quaisquer índices h e k ($1 \leq h \leq n$, $1 \leq k \leq n$), $D_h \cap D_k = \varnothing$.
- $\cup \{D_h: 1 \leq h \leq n\} = \mathsf{A}$.

Já podemos enunciar os axiomas iniciais:

Início de uma exposição axiomática —

> "Whereas the axiomatic method was formerly used merely for the purpose of elucidating the foundations on which we build, it has now become a tool for concrete mathematical research. [...] It is perhaps proper to say that the strength of modern mathematics lies in the interaction between axiomatics and construction." Hermann WEYL (1951). *A half-century of mathematics*, p. 523-524

Sejam um conjunto não vazio A, a que chamaremos espaço amostral, cujas partes serão denominadas eventos. Atribuiremos a cada evento E um número, denotado por p(E), a que chamaremos a probabilidade de E, que atende às condições seguintes:

- $0 \leq p(E) \leq 1$
- Se os eventos E e F forem disjuntos (isto é, se $E \cap F = \varnothing$), então $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$.
- Dada qualquer decomposição $\{D_1, \ldots, D_n\}$ do espaço amostral A, $p(D_1) + \ldots + D_n\} = 1$. Equivalentemente, $p(\mathsf{A}) = 1$.
- $p(\varnothing) = 0$, isto é, é nula a probabilidade de um evento impossível.

Note-se que os axiomas enunciadas não indicam o modo de se atribuir uma probabilidade a cada evento. Esse fato já fora reconhecido por Henri Poincaré, que aventou duas respostas à mesma pergunta: Quando se lançam dois dados, qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dados apresente a face que mostra o número cinco?

(a) Como cada dado pode apresentar seis faces, o número de casos possíveis é trinta e seis e o número de casos favoráveis é onze. Logo, a probabilidade é 11/36.

(b) O número de casos favoráveis pode ser computado, escolhendo-se a face cinco de um dado, que se pode combinar com qualquer das faces do outro dado; logo, esse número é seis. O número de casos possíveis é o número de escolhas (*com repetição*) de dois objetos entre seis objetos, (6 x 6)/2 = 18. Logo, a probabilidade é 6/18 = 12/36.

Perguntava-se Poincaré: "Pourquoi la première manière d'énumerer les cas possibles est-elle plus légitime que la seconde? En tout cas, ce n'est pas notre définition [de probabilidade] qui nous l'apprend. [...] La conclusion qui semble résulter de tout cela, c'est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu'il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bons sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions." (POINCARÉ 1899:192-193)

Note-se também que os axiomas enunciados tampouco sugerem a existência de nexos causais entre os eventos e suas expectativas. Como escreveu WITTGENSTEIN (Tractatus, 5.1361): "*Der Glaube an den Kausalnexus ist der Aberglaube*". [A crença no nexo causal é superstição.]

---

4 - Escritos referidos

ALEXANDRE, C. (1901). *Dictionnaire Grec - Français*. Paris, Hachette

ANDRADE, Roberto Fernandes Silva (2002). *Mecânica estatística*. In: ROCHA 2002:161-181

ARNOLD, Vladimir (1997). *On teaching mathematics*. (HTTP://WWW.ARNOLD/TEACHING.HTM)

BAILLY, A. (1950). *Dictionnaire Grec-Français*. Paris, Librairie Hachette

CARRIER, G.; COURANT, R.; ROSENBLOOM, P.; YANG, C. (1962). Applied mathematics: what is needed in research and education. *SIAM Review*, vol. 4, n. 4, 297-320

CHAPELON, Jacques (1962). *Les mathématiques et le développement social* in Le LIONNAIS (1962:511-519)

CERRO, Jesús Santos del (2006). L'ars conjectandi: la géométrie du hasard versus le probabilisme moral. *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 2, n. 1, p. 1-24

COOLIDGE, Julian Lowell (1940). *A history of geometric methods.* Oxford, Clarendon Press

COURTEBRAS, Bernard (2005). *Sur quelques conceptions du hasard* in HENRY (2005), p. 95-132

DANTAL, Bernard (2005). *Les enjeux de la modélisation en probabilités* in HENRY (2005), p. 137–140

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben (1985 [1982]). *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves

DIEUDONNÉ, Jean (1973). *Should we teach "modern" mathematics?* American Scientist, volume 61, p. 16–19.

DORIER, Jean-Luc (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear algebra and its Applications*, 141–160

EAGLE, Antony (2004). *Twenty-one arguments against propensity analyses of probability*. Erkenntnis 60:371-416.

EVES, Howard (1997 [1994]). *Introdução à história da matemática*. Campinas, Editora da UNICAMP.

FERNANDEZ, Pedro J. (1973). *Introdução à teoria das probabilidades*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; Brasília, Editora da UNB

GARDING, Lars (1997). *Encontro com a matemática*. Brasília, Editora da UNB.

GRIMAL, Pierre (1951). *Dictionnaire de la mythologie grecque et romaine*. Paris, Presses Universitaires de France

HEGENBERG, Leônidas (1976). *Etapas da invesigação científica*, vol. 1. São Paulo, EDUSP

HENRY, Michel (2005). *Autour de la modélisation en probabilités*. Besançon, Presses Universitaire de Franche-Comté

KLINE, Morris (1976 [1973]). *O fracasso da "matemática moderna"*. São Paulo, IBRASA

LANIER, Denis; TROTOUX, Didier (1995). *La loi des grands nombres —— Le théorème de De Moivre - Laplace*. Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques, collection "Les publications de l'IREM de Besançon", pp. 259-294. Presses universitaires de Franche-Comté/ Université de Franche-Comté, 1995

Le LIONNAIS, François (1962). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris, Albert Blanchard

MEHRTENS, Herbert (1976). Thomas Kuhn's theorues and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics. *Historia mathematica* 3 (1976), 297–320

MORGADO, A. C. Oliveira; CARVALHO, J. B. Pitombeira; CARVALHO, P. C. Pinto; FERNÁNDEZ, Pedro (1991). Análise combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática

PENROSE, Roger (1991 [1989]). *A mente nova do rei*. Rio de Janeiro, Editora Campus

PICHARD, Jean-François (2005). *Les probabilités au tournant du dix-huitième siècle* in HENRY (2005), p. 13–45

POINCARÉ, Henri (1899). *Le calcul des probabilités*. In POINCARÉ 1968:191–213

POINCARÉ, Henri (1968 [1902]). *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion

POPPER, Karl (1994 [1981]). *Conjecturas e refutações*. Brasília, Editora da UNB

SHAFER, Glenn; VOVK, Vladimir (2005). The origins and legacy of Kolmogorov's *Grundbegriffe*. The Game-Theoretic Probability and Finance Project, http://probabilityandfinance.com

STEWART, Ian (1991). *Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor

STRUIK, Dirk (1987). *A concise history of mathematics*. New York, Dover Publications

THOM, René (1971). "Modern" mathematics: an educational and philosophic error? *American Scientist*, volume 59, p. 695-699

ZOCCANTE, Sergio (2005). *Fondamenti storici ed epistemologici della probabilità*.