

A matemática e o inteligível

René Thom

Traduzido por Marcelo Papini

Súmula

Esta exposição propõe-se recolocar o pensamento matemático na moldura biológica e antropológica de uma teoria da evolução. O pensamento matemático desenvolveu-se, na espécie humana, sob a necessidade de simular os processos que ocorrem no mundo exterior, simulação esta mais refinada que a fornecida pela linguagem usual. Mas ela oferece, relativamente à infra-estrutura biológica, a inovação radical das estruturas aritméticas e algébricas fundadas sobre a iteração indefinida de uma operação. O pensamento algébrico simula, empurrando-a ao extremo, a oposição indeterminismo versus determinismo, sob a forma de um par: variável e operação.

Da exposição do Ferdinand Gonseth, reteremos o seguinte asserto: o problema da relação entre a matemática e a realidade não se pode dissociar do problema geral de uma teoria do conhecimento. Partiremos desse ponto de vista, tentando precisar o papel e a função do pensamento matemático na evolução biológica que conduziu do animal ao homem moderno, mediante o desenvolvimento da linguagem.

(1) Do animal ao homem

Presentemente, é mais ou menos admitido que o papel fundamental do sistema nervoso central nos animais consiste em oferecer uma *carta local* que simule a posição do organismo em seu meio ambiente bem como a imagem de seres (vivos) biologicamente importantes, como as presas e os predadores. O reconhecimento de uma presa, por exemplo, provocará um reflexo motor de captura que, geralmente, é dotado de uma precisão surpreendente; freqüentemente, ele comporta uma antecipação do movimento de fuga da presa. Equivale a dizer que o psiquismo animal é constantemente solicitado pela presença de formas "portadoras de sentido" (ou "alienantes") que provocam processos motores de longo alcance. Assim, pois, no animal superior, já encontramos dois processos:

- a) Um processo de *reconhecimento de formas*, que implica uma classificação das formas em formas boas, más e indiferentes.
- b) Um processo de *localização*, que permite situar essas formas relativamente ao organismo e que conduz a movimentos precisos de captura ou de fuga.

Em compensação, é razoável supor que um animal não possui uma imagem global do espaço nem, talvez, o sentimento subjetivo permanente de seu próprio corpo. A carta local fornecida pelo sistema nervoso contém, certamente, um integrador dos movimentos

do organismo que, mediante uma integração repetida da aceleração x (por exemplo, fornecida pelos dados sensoriais do ouvido interno), permite reconstituir-lhe o movimento $x(t)$. Mas essa integração possui duração curta e não poderia exceder em amplitude a largura da carta local. De fato, o território global do animal decompõe-se em subterritórios, estando cada um deles associado a um comportamento fisiológico bem definido (caça, sono, ninhada etc.); e a passagem de um subterritório a outro opera-se por situantes de caráter visual ou olfativo, associados eles próprios a estados fisiológicos ou afetivos. Equivale a dizer que, no animal, a construção global do espaço, mediante a reunião das cartas locais associadas aos subterritórios, se efetua às expensas de fatores não espaciais, de caráter afetivo ou fisiológico.

O caráter descontínuo da distinção entre sujeito e objeto no psiquismo animal ainda é patente no homem, na alternância entre vigília e sono. Contudo, no curso da evolução, diversos fatores permitiram assegurar uma melhor permanência ao eu humano, assim como uma maior independência em oposição às formas "alienantes" da biologia:

- a) de início, a importância quantitativa acrescida do *sonho*, que permite uma certa consciência no sono;
- b) em seguida, o *jogo*, já presente nos mamíferos superiores, permitindo ao organismo efetuar uma ação reguladora gratuita na ausência do estímulo que normalmente a provoca (assim o gatinho brinca com uma bola de lã, como se fora um rato;
- c) enfim, a marca crescente da pertinência do indivíduo ao grupo social.

As "formas" socialmente importantes (como a presença de um grupo humano inimigo) puderam adquirir maior importância que as formas biológicas de presas e predadores. Daí provém a extensão das formas "portadoras de sentido" para o indivíduo às formas "portadoras de sentido" para o grupo social; o surgimento de tais formas necessitou evidentemente de uma comunicação entre os membros do grupo, permitindo assim à linguagem operar como um regulador sensorial entre os membros da coletividade. Isso conduziu à formação, entre as formas boas e más, de um "banco de compromissos" de formas interessantes, com significação mais biológica que social. Essas formas já não solicitam reflexo motor mas um reflexo "verbal", a emissão de uma palavra. O caráter alienante das formas biológicas estende-se e debilita-se por diluição em formas biologicamente neutras: o ser humano libertou-se do poder alucinatório de tais formas, atribuindo-lhes um nome. Substituiu a captura (ou a fuga) pelo reconhecimento da forma e a evocação do conceito correspondente. Simultaneamente, as estruturas sintáticas da linguagem permitem uma simulação das ações recíprocas típicas entre os seres do mundo exterior. As ações recíprocas semânticas (lógicas) entre conceitos são imagens das interações espaço-temporais das coisas às quais os conceitos se reportam. Por exemplo, a predação biológica oferece o paradigma

inicial da frase transitiva (sujeito - verbo - objeto): *o gato apanha o rato*. As ações recíprocas correspondentes definem as morfologias estáveis (arquetípicas), por exemplo, o grafo da captura, e constituem tantos núcleos de inteligibilidade do real, segundo a expressão de J. Ladrière (cf. 29 para uma definição dessas morfologias arquetípicas).

Contudo, ainda que a estabilidade dessas morfologias arquetípicas, independentemente de sua situação espaço-temporal, suponha uma certa homogeneidade na representação do espaço-tempo, falta muito para que o espaço seja concebido globalmente. Ainda aí, o território da tribo (ou do clã) encontra-se decomposto em subterritórios, associado cada um a uma atividade econômica ou política bem definida. A concordância entre esses territórios incumbe à atividade mítica da organização coletiva; é a vida lendária do antepassado mítico (o totem) que, geralmente, em uma forma de itinerário-guia típico, permite o acolhimento espacial desses subterritórios, marcado cada um por um centro cultural de caráter sagrado. Além disso, essa plasticidade na representação do espaço persiste no nível individual no *pensamento mágico*. Com efeito, o que caracteriza esse último é a crença em que certos indivíduos, os feiticeiros, possam atuar sobre a topologia do espaço, modificando-lhes a forma própria. Por exemplo, admitir-se-á que um feiticeiro possa, simultaneamente, dormir em sua cabana e ser um tigre caçando na selva, a uma boa distância de lá (é a isso que Lévy-Bruhl chamou "participação"); matematicamente, poder-se-ia enunciar o fato da participação do modo seguinte: é possível a um indivíduo, dotado de poder mágico, identificar um aberto U do espaço (que contém seu próprio corpo) a um outro aberto V do espaço, de sorte que, no homeomorfismo de identificação $h: U \rightarrow V$, o homem se encontre transformado em um tigre. Além disso, essa identificação é concebida como real, pois todo ferimento cometido ao tigre em V será igualmente cometido ao homem em U . Essa "curvatura" do espaço, que permite identificar U e V , provém da injeção no espaço de uma energia espiritual, resultante de uma identificação semântica, canalizada em ritos e fórmulas, do mesmo modo que a curvatura do espaço-tempo exprime a densidade em energia na teoria geral da relatividade.

(2) Surgimento do pensamento matemático

Vimos que a função essencial do sistema nervoso central consiste em fornecer um modelo que simule os processos exteriores ao organismo. Quanto mais fiel for esse modelo, tanto mais biologicamente privilegiado será o animal. Na espécie humana, o psiquismo começou por representar os processos do mundo exterior que são simultaneamente freqüentes e estruturalmente estáveis. Com efeito, é totalmente inútil simular os processos instáveis ou aleatórios, já que, de qualquer modo, por definição, esses últimos apresentam uma evolução imprevisível. Equivale a dizer que a linguagem permitiu, por suas estruturas sintáticas, uma simulação qualitativa muito exata das principais interações espaço-temporais

que ocorrem na regulação dos seres vivos e dos movimentos dos objetos inanimados. Mas a distinção entre processos determinados e "indeterminados (aleatórios)" é uma questão de grau, não de natureza, e evidentemente apresenta o maior interesse poder simular as partes do processo exterior consideradas indeterminadas, à primeira vista. Podemos dizer, *grosso modo*, que a matemática nasceu da necessidade de simular a alternância entre os processos indeterminados e os processos extremamente determinados (convergentes). Por exemplo, esperar uma presa com um míssil: o movimento relativo do míssil e da presa é um processo relativamente indeterminado, pois depende fortemente da precisão das condições iniciais do jato e das reações da presa. Mas o choque do míssil com a presa é um processo fundamentalmente irreversível, que conduz à morte (ou a imobilização) dessa última. Na realização algébrica (ou aritmética) dessa alternância, a parte determinada do processo é expressa pela noção de *operação* e parte indeterminada, pela noção de *variável*. Eis três exemplos:

a) *A construção do conjunto N dos inteiros naturais*

Aqui, a variável é o valor n do número inteiro; a operação é a adição com o número um, que transforma n em $n+1$. O fenômeno típico (e profundamente contrário à natureza, como, com precisão, Dieudonné apontou em sua palestra) consiste em que a "adição de um" é qualitativamente sempre a mesma e em nada depende das operações anteriores que conduziram à definição do valor n sobre o qual a operação atua. Tudo acontece como se o resultado de cada operação fosse "posto na memória" e, por isso, fosse completamente neutralizado, no momento no qual novamente se aplica a operação $+1$. Apenas na determinação do *resultado* da operação o conteúdo " n " da memória aparece no valor " $n+1$ ", obtido após essa operação. Nenhum sistema natural fornece (nem jamais fornecerá) um modelo isomorfo ao conjunto N dos inteiros naturais. Nesse sentido, poder-se-ia ver nesse surgimento da idéia de infinito um fator novo - radicalmente incompreensível para produzir em uma máquina finita, como o é o conjunto dos neurônios do cérebro humano; de qualquer forma, Descartes não errou ao ver na idéia de infinito uma prova da existência de Deus! Explicarei, adiante, como somente a prioridade ontológica do conteúdo geométrico permite escapar a essa dificuldade.

b) *A adição aritmética*

Consideremos dois conjuntos E e F , suporemos esses conjuntos realizados espacialmente como os conteúdos de dois recipientes R e S . (Em uma representação gráfica plana, os conjuntos R e S serão representados como os interiores de duas curvas simples e fechadas C e D , disjuntas: trata-se aqui, reconhece-se, da representação, profundamente natural, de conjuntos como batatas.) Suponhamos agora que um dos recipientes R ou S capture o outro, na acepção em que se diz, por exemplo, que uma bacia de potencial captura outra bacia. Então esse processo de captura é a "operação" que atua sobre os conteúdos E de R e F de S . Se os elementos dos conjuntos E e F são realizados espacialmente como objetos sólidos e

impenetráveis, então o número desses elementos após a captura é a soma dos números dos elementos de E e F. Assim, a adição aritmética corresponde à morfologia da captura, sendo as variáveis os conteúdos dos recipientes. Da mesma forma, a subtração corresponde à morfologia arquetípica da excisão.

c) *O monóide livre com dois geradores {a, b}*

Para construir uma palavra do monóide livre gerado por {a, b}, devemos, após a escolha sucessiva de k letras do conjunto {a, b}, nele escolher uma letra de ordem k+1. Mas essa escolha é inteiramente livre e arbitrária e a probabilidade de escrever a ou b na posição de ordem k+1 é independente das letras previamente escolhidas. Também aqui a memória é completamente neutralizada. Apenas na operação de concatenação de duas palavras, X e Z, as memórias de X e Z reaparecerão para compor a memória da palavra produto X·Z. Lembremos que uma tal neutralização da memória nas escolhas sucessivas é profundamente contrária a qualquer dinâmica natural.

(3) A prioridade ontológica do contínuo geométrico

Como vimos no segundo exemplo, a operação algébrica corresponde a uma das morfologias arquetípicas expressas por um verbo como *capturar, tomar* ... A operação "mais um" do primeiro exemplo é susceptível de uma interpretação do mesmo gênero; podemos considerar que a seqüência dos inteiros naturais é produzida por uma seqüência de morfologias de emissão, simbolizada pelo gráfico inverso ao da captura; isso seria uma figuração diagramática da axiomática da aritmética devida à Frege. Essa iteração indefinida de uma operação pode ser considerado com o resultado da atividade lúdica do espírito. Segundo a regra geral da formação pavloviana dos reflexos dos automatismos, todo conjunto de regras que conduz ao bom êxito tende a ser repetido, mesmo na ausência das condições normais que o produziram. O único aspecto novo (em tamanho, é verdade) aparece na extrapolação infinita do processo.

Assim, pois, a atividade matemática, por sua exigência simultânea de liberdade e de determinismo, parece voltar as costas a toda dinâmica natural; cuidadosa em simular a mistura do determinismo e da indeterminação prática, ela, de uma só vez, leva a seu extremo essa oposição: um período de liberdade total (associada a uma memória fiel e perfeitamente ineficaz) seguida de um processo de determinismo absoluto. Assim operando, ela não deixa de imitar certos mecanismos de nossa fisiologia, como a visão. Quando percebemos visualmente, o conjunto das coisas vistas se acumula na memória imediata, sem que em momento algum essa carga mnemônica contínua afete a virgindade, a total disponibilidade de nossos órgãos perceptivos (retina e córtice visual) em consignar novas percepções.

Como, nessas condições, pôde o "salto matemático" conduzir a uma simulação eficaz do mundo que nos rodeia? Cumpre ter a coragem de reconhecê-lo: Efetua-se o contacto entre a matemática e a realidade através da presença das grandes estruturas contínuas, o grupo métrico ou o espaço R^3 que é seu espaço homogêneo. Foi visto que, desde agora, os animais tinham por resolver uma multiplicidade contínua de problemas de mecânica relativos ao deslocamento do organismo; o grupo métrico (ao menos sob a forma de germe) configura na embriologia nossa armação orgânica, como o globo de nossos olhos. Equivale a dizer que o espaço euclidiano, sob a forma do contínuo geométrico, preexiste na formação de nossas atividades mentais, porque está presente na fisiologia. Desse ponto de vista, a operação "mais um" que produz os números naturais possui um abonador espacial imediato: a operação de medida de um comprimento. Essa consiste, sabemos-lo, em levar a fita métrica à extremidade do comprimento que se quer medir. Assim se efetua, de modo puramente espacial, independente de todo conteúdo afetivo ou semântico, a concordância de duas cartas. Como essa operação é independente do comprimento já medido, explica-se o caráter invariante da operação "mais um": a fidelidade da memória a um abonador físico na natureza sólida do comprimento por medir.

Desde o momento em que a espécie humana mediu comprimentos, fundaram-se a geometria e, com ela, a concepção global do espaço. A geometria nulificou a magia, pois a concepção de um espaço fixo, válido para todos e independente de nossa vontade, derroga a crença no poder "transpacial" do feiticeiro. Não é exagerado ver no aparecimento relativamente tardio da geometria a explicação do problema colocado por Lévi-Strauss em "*O pensamento selvagem*" - a parada na evolução da cultura após as grandes conquistas do neolítico. O pitagorismo, transferindo a magia em uma descrição afetiva (e universal) dos inteiros naturais, constituiu talvez a transição necessária. E talvez caiba reverter a interpretação tradicional dos paradoxos dos eleatas. Não é o contínuo que constitui o problema mas sim, o contínuo, em sua realização de infinito atual, o qual justifica o infinito enumerável: pois Aquiles acaba por ultrapassar a tartaruga ...

(4) O estatuto ontológico das teorias matemáticas

Se é verdade que o automatismo das construções algébricas apenas pode desligar a construção mental do real, podemos indagar a origem da eficácia inegável da matemática na descrição do mundo. A evolução da matemática aparece como uma sucessão de impulsos de automatismos, que desligam do real e que, às vezes, o reencontram, em uma escala mais integrada. Através de qual milagre? É que, como disse Dostoiéwski, à realidade falta, às vezes, o espírito: existe automatismo nas coisas; existe a exatidão desarrazoada das leis físicas (P. Wigner); existe o fato de que certas situações dinâmicas realizam a mais perfeita indeterminação (o jogo de dados). É porque a matemática é o instrumento por excelência da

conquista do determinismo. Ela coloca-se de uma só vez no ponto de vista de um jogador totalmente livre, com memória perfeitamente fiel e ineficaz. Então, pelos desvios que ela verifica entre essa situação ideal e a fenomenologia da experiência, ela impõe constrangimentos a essa dupla estrutura; ela penetra a natureza dos automatismos escondidos, subjacentes aos fenômenos naturais.

Decorre daí que o estatuto ontológico das teorias matemáticas seja tão diverso. Sem descer às minúcias, podemos dizer que a matemática progride de três modos diferentes:

a) Por um processo endógeno, a matemática explora os esquemas algébricos conhecidos e, levando a iteração ao infinito, desenvolve toda a teoria pela maturação axiomática até a extinção.

b) Por intrusão de material novo, resultante da experimentação científica, ela reencontra novos problemas e, para resolvê-los, deve forjar novas teorias.

c) Por um processo de revelação interior muito parecido com uma psicanálise, o matemático torna-se de súbito consciente de uma noção de que até então ele tratou inconscientemente (por exemplo, o descobrimento da topologia geral após a definição por Cantor dos conjuntos fechados e abertos).

É assaz claro que a explicitação definida no primeiro item não pode nem um pouco conduzir a novos pontos de vista e que teorias assim produzidas, resultantes do automatismo algébrico, vêm degradar-se o seu estatuto ontológico à medida que se afastam do tronco comum da matemática clássica por escolhas construídas e arbitrárias. O processo descrito no segundo item e, sobretudo, o descrito no terceiro, pelo contrário, reabilitam a validade ontológica do material matemático. Enfim, existem teorias cujo coração resiste à degradação algébrica, como a teoria clássica dos números. Algumas teorias aderem estreitamente ao real, como o cálculo diferencial. Outras dele se afastam mais ou menos sob o efeito do desligamento semântico devido ao automatismo algébrico (como os transfinitos de Cantor). Sem descer a minúcias, podemos admitir que, se uma construção algébrica discreta não pode mergulhar naturalmente em uma estrutura contínua simples (como o jogo de xadrez), sua validade ontológica é mais duvidosa e uma exploração ulterior pode apenas fazê-la afundar na insignificância. *Não é o falso mas o insignificante que limita o verdadeiro.*

(5) Matemática e ciências empíricas

A maior parte das ciências da natureza dispõe de uma conceituação que lhe é própria (por exemplo, a biologia). Assim podem elas fixar um sentido às construções teóricas expressas na língua comum. Mas é muito provável que os progressos ulteriores de uma tal ciência passem pela eliminação dessa significação verbal (de

modo semelhante à ascese hilbertiana nos fundamentos da geometria). Então a função de uma tal ciência será exhibir (ou descrever) uma morfologia empírica, constituída em um corpo; depois, classificar as formas correspondentes; enfim, tentar a explicação delas, produzindo-a quase axiomáticamente. Será necessário, com esse fim, dispor de uma álgebra de formas, o que imporá a generalização, em dimensão superior, do conceito de *operação algébrica*, fundada, como foi descrito, sobre a liberdade do operador e a fidelidade de sua memória. Poder-se-á, assim, "reduzir o arbitrário da descrição", o que constitui o próprio objetivo da atividade científica. Desse ponto de vista, todos os fatos do mundo exterior não apresentam o mesmo interesse. A terrível inflação da produção das ciências experimentais atuais também manifesta uma certa degradação ontológica da realidade. As faltas cometidas pelo paradigma das leis quantitativas da física aplicada (ou da estatística) em domínios não pertinentes já não merecem refutação. *"Se V. propõe uma pergunta estulta, só pode obter uma resposta estulta."* [If you ask a silly question, you can get nothing but a silly answer.] Não existe dúvida em que somente a matemática é capaz de "teorizar", de dirigir o experimentador para "boas" questões. Para isso, contudo, caberá renunciar ao modelo quantitativo clássico em proveito de uma visão mais qualitativa das coisas, na qual a álgebra, entretanto, terá o que dizer.

(6) Conclusão: O inteligível em matemática

Qual é o sentido em matemática? A atitude formalizadora tradicional consistiria em dizer que o sentido de um símbolo, ou de um objeto matemático, é o conjunto de operações que se lhe podem aplicar (do mesmo modo que se diz, em lingüística, que a significação de um vocábulo é o seu uso). Acredito que essa definição seja correta mas ela não leva a muito longe, pois o comportamento matemático perante um símbolo é uma coisa muito mais refinada e indeterminada que o reflexo motor de um animal diante de "uma forma detentora de sentido". Do mesmo modo que o sentido de um conceito se poderia definir pela totalidade de seus mecanismos de regulação (imagens analógicas dos mecanismos de regulação do referido organismo), poder-se-ia definir o sentido de um ente matemático por seu lugar na escala dos entes matemáticos, a totalidade das degradações semânticas a que ele ainda pode submeter-se, antes que se extinga na insignificância. É a maldição inata da matemática (como talvez de toda a ciência) que ela só se possa construir pela morte de seus objetos. Somente a salva desse suicídio inelutável um retorno periódico às fontes, um confronto com as aplicações experimentais (segundo item) ou com os problemas fundamentais do ser (a geração implícita que separa o sujeito do objeto (terceiro item)). É na tentativa de conferir um sentido às coisas que a matemática descobre o seu próprio sentido; é o inteligível do real que recria incessantemente o inteligível matemático.

Título original:

Les Mathématiques et L'Intelligible.
Dialectica, vol. 29, n. 1 (1975), 71-80