

O papel da intuição

A intuição desempenha um papel básico e indispensável na pesquisa matemática e nos modernos métodos de ensino.

Raymond L. Wilder
Traduzido por Marcelo Papini

Lembro-me de que, quando era estudante de doutoramento, muitas vezes fui admoestado por meus orientadores a não permitir que a intuição me enganasse. Não consigo, contudo, lembrar-me exatamente de como eu interpretava esse conselho. Provavelmente, eu pensava que ele significasse: "Não deixe que a imaginação o induza em erro. Muito provavelmente é falso aquilo que você pensa ser verdadeiro."

Um dos meus artigos favoritos a esse respeito é a transcrição da palestra de Hans Hahn, intitulada *A Crise na Intuição*, que figura na antologia *O Mundo da Matemática*, editada por J. R. Newman (1). Esse artigo imita as advertências de meus antigos professores, especialmente o conselho "muito provavelmente é falso aquilo que você pensa ser verdadeiro." De fato, podemos obter do artigo de Hahn a impressão de que a *intuição* seja um guia completamente falível e de que devemos encará-la com desconfiança, mesmo quando qualquer de suas sugestões tenha sido rigorosamente verificada.

Parece-me que a ninguém ocorreria discutir a exigência de verificarmos cuidadosamente as sugestões de nossa intuição. Porém, no que tange à completa falibilidade da intuição, opino que essa qualidade mental, seja ela o que for, tem sido por demais difamada. Na verdade, irei ao extremo de afirmar que, na ausência da intuição, a criação matemática quase cessaria e que os métodos modernos de ensino dificilmente seriam justificados.

A natureza da intuição matemática

A fim de fundamentar essa disputa, devemos clarificar o que, em matemática, se entende exatamente por *intuição*.

Não há muito tempo, viram-se em apuros os investigadores que estavam tentando pôr à prova a inteligência, por que ignoraram o problema de definir exatamente o que entendiam por *inteligência*. Em seguida, esses pesquisadores apareceram com um número, o *quociente de inteligência* ou Q. I., e demonstraram que, geralmente, um estudante dotado de Q. I. mais elevado se sairia melhor em seus estudos que um estudante de Q. I. mais baixo. Porém, o conceito de Q. I. como medida de algo denominado *inteligência inata*, isto é, a inteligência hereditariamente transmitida ao indivíduo, teve de ser abandonado. Após numerosos experimentos, especialmente com recrutas durante a Primeira Guerra Mundial, ficou patente que o ambiente cultural modifica tanto essa inteligência inata que o Q. I. constitui, quando muito, uma medida do efeito combinado da herança e do ambiente sobre o indivíduo no tocante à capacidade de aprender, à

sua percepção e ao grau de sua conformidade às diretrizes culturais. E que um Q. I. pode, ao longo de um certo interstício, ser reduzido ou aumentado por fatores ambientes, ativos durante esse interstício (2).

Voltando à intuição matemática, é de se esperar que haja uma situação análoga. Acredito que a intuição de que falam alguns filósofos — se não todos mas quando menos alguns — seja uma *intuição inata*. Assim Descartes declarou (3): "Por *intuição* entendo, não o testemunho vacilante dos sentidos nem o julgamento ilusivo procedente das construções descuidadas da imaginação mas a compreensão que uma mente límpida e atenta nos concede tão pronta e distintamente que ficamos inteiramente livres de dúvida acerca do que entendemos." E Kant, assim como eu o interpreto, entende que ambos os conceitos de tempo e espaço derivam de uma intuição *a priori* que independe da experiência. Entre os filósofos mais recentes, especialmente aqueles de propensão mística, o conhecimento facultado por essa intuição inata pode ser considerado mais legítimo que o obtido por observação e experimento. O *intuicionismo* de Brouwer e Poincaré, na medida em que concebeu os números naturais como *dados intuitivamente*, parece provir dessa intuição inata.

Não creio que meus professores estivessem pensando em alguma coisa semelhante a essa intuição inata. Ademais, sempre duvidei que eles jamais houvessem tentado analisar exatamente o que eles entendiam por *intuição*. Acredito, porém, que eles a associassem, de algum modo, com a experiência — a experiência matemática, para ser mais preciso — e que, quanto mais experiente se tornasse o matemático, tanto mais confiável se tornaria a sua *intuição*. Isto é, a intuição matemática, assim como a inteligência, é uma qualidade psíquica que possivelmente provém de uma faculdade transmitida hereditariamente mas que, em um qualquer instante, se consubstancia no acervo de atitudes derivadas da experiência matemática. Isso não significa que a intuição matemática seja alguma coisa que já contenha nossa atitude perante uma situação matemática que nunca tenhamos enfrentado. Na verdade, nesta época em que a matemática se diversifica em uma pluralidade de ramos, espera-se que um matemático tenha pouca ou nenhuma intuição diante de um ramo com o qual ele nunca trabalhou; sua intuição é útil sobretudo naqueles ramos com os quais ele tem tido experiência. Acredito que haja um certo acordo entre esse asserto e a afirmativa com que Hahn termina seu artigo (1), a saber, que a intuição "é a força do hábito implantada na inércia psíquica". Assim como a inteligência, e aqui me refiro ao tipo de inteligência em que pensam os medidores de Q. I., a intuição é amplamente influenciada, possivelmente inteiramente formada, pelo ambiente cultural — provavelmente em um grau maior que a inteligência. Pois acredito que, em particular, o leigo médio não possui nenhuma intuição matemática, salvo aquela qualidade indistinta da mente que, se nutrida pela experiência com a matemática, se converterá no qual denominamos intuição matemática.

A intuição individual versus a intuição coletiva

Tenho usado o vocábulo *psíquico* referindo-me à intuição (do-ravante, *intuição* significará *intuição matemática*). Desejo enfi-

zar que meu tema primário é a intuição do matemático como sujeito. Não desconheço que no estudo de certas questões existe o que se poderia denominar uma intuição coletiva ou cultural. Por exemplo, antes que Weierstrass desse o exemplo de uma função real contínua destituída de derivada em qualquer ponto de seu domínio, provavelmente quase todo matemático sentiria intuitivamente que tal função não poderia existir; essa intuição tornara-se uma atitude cultural, uma crença comum. Considere, porém, o problema do mapa de quatro cores ⁽⁵⁾: duvido que o matemático médio hodierno tenha um sentimento intuitivo quanto à existência ou à inexistência de um mapa que não possa ser colorido com apenas quatro cores - simplesmente por que ele nunca trabalhou com esse problema. E uma afirmativa análoga pode ser feita sobre o denominado "último teorema de Fermat" assim como sobre muitos outros problemas. Antes que possamos nutrir um sentimento realmente intuitivo acerca de tais problemas, deveremos ter trabalhado com eles. Porém qualquer pessoa que tenha avançado em matemática terá trabalhado com funções de uma variável real e, espera-se, terá desenvolvido uma intuição a esse respeito. Um asserto semelhante vale para a estrutura do contínuo dos números reais. No tocante aos conceitos matemáticos que fazem parte do enxoval de todo matemático, espera-se que exista um tipo de intuição comum à maioria dos membros da comunidade matemática. Porém, tão logo transponhamos esses conceitos e alcancemos as especialidades matemáticas - particularmente nas suas fronteiras - então a intuição se torna um assunto estritamente pessoal; e é essa intuição que tem importância imediata em trabalho criativo.

Porém isso se encontra em inteiro acordo com o conceito de intuição matemática como um acervo de atitudes derivadas da experiência pessoal. No tocante a matérias de conhecimento comum, como a teoria das funções, as atitudes que adquirimos são determinadas por nossos instrutores, sendo manifesta a relação com a cultura matemática geral da época. Quando, porém, cultivamos um ramo especial de interesse e, especialmente, quando nos envolvemos com a pesquisa na sua fronteira, então desenvolvemos nossas próprias atitudes à luz de nossas próprias experiências pessoais. Somente pode fazer a adivinhação educada quem houver desenvolvido sua própria intuição. E é muito menos direta a conexão com a atmosfera cultural vigente, embora ainda seja delineável.

Chegando ao meu tema principal — o papel da intuição — é aconselhável, creio eu, olhar primeiro para alguns exemplos específicos. E já que o modo pelo qual a intuição exerce influência varia segundo seja coletiva (cultural) ou individual e segundo seja verdadeira ou falsa, separarei os exemplos segundo esse esquema.

Exemplos

Inicialmente, consideremos a intuição supostamente possuída pelos gregos e, certamente, por seus sucessores medievais, de que era verdadeiro o axioma das paralelas. Uso o termo *verdadeiro* no sentido absoluto, no qual eles parecem tê-lo usado. Essa é uma crença intuitiva possuída por todos os matemáticos, pois, durante o interstício considerado, se supunha versado nos *Elementos* de Euclides todo aquele que se declarasse perito em matemática. Esse é um exemplo no qual a intuição coletiva era um guia falso - um caso tí-

pico entre todos os citados por Hahn em seu ensaio. Interessa, contudo, tentar estimar a influência global que essa intuição teve na matemática. Que essa intuição fosse falsa não é motivo suficiente para concluirmos que fosse ruim. E, nesse caso, creio eu, a influência foi altamente salutar. Pois, não fosse a convicção de que o axioma das paralelas pudesse ser provado às expensas dos outros axiomas de Euclides - e essa convicção decorria diretamente da intuição comum respeitante à sua veracidade - então, possivelmente, teriam sido retardados o surgimento das geometrias não euclidianas e o seu efeito sobre toda a matemática e a filosofia. Certamente, a geometria não euclidiana teria sido descoberta, mais cedo ou mais tarde, senão por outro motivo, por causa do método axiomático. Com efeito esse método, concebido por Hilbert nos seus *Fundamentos da Geometria*, já estava começando a emergir no trabalho de vários matemáticos, como Boole e Hamilton. E certamente alguém terminaria por experimentar alternativas ao axioma das paralelas, exatamente como Hamilton e Grassmann experimentaram recusar as leis comutativas da álgebra. Porém, por causa da posição especial ocupada pela geometria euclidiana, não apenas em filosofia mas como parte do currículo matemático geral, o impacto da conseqüente compreensão da independência do axioma das paralelas sobre a comunidade matemática e filosófica iniciou uma cadeia de pesquisa, causando uma revolução virtual no pensamento filosófico e matemático.

Já referi a intuição, também falsa, que sustentava a convicção de que toda função contínua deveria apresentar derivada em algum ponto de seu domínio. Estou seguro de que, se se houvesse feito um estudo da infra-estrutura histórica anterior à publicação do exemplo de Weierstrass (6), se teria concluído que a influência dessa falsa intuição teve aspectos benéficos. Posso revocar, de imediato, o método proposto por Lagrange para calcular derivadas mediante a expansão de funções em séries de Taylor, inaugurando assim a teoria das funções analíticas. Soubesse ele, como o sabemos nós agora, que a maior parte das funções contínuas (*maior parte* na acepção das categorias de Baire) não admite derivada em ponto algum de seu domínio, não seria ele provavelmente dissuadido de propor um método que supunha aplicável a todas as funções contínuas?

Para tomar um caso mais recente, considere a *curva fechada* geral; mais especificamente, uma curva que seja a fronteira comum de dois domínios do plano. Há sessenta e cinco anos, havia um maior interesse geral nessa configuração topológica que hoje, pois tanto o teorema da curva de Jordan como a curva de Peano que preenchia uma região haviam estimulado a curiosidade por curvas planas. Ainda que agora conheçamos exemplos bastante simples de curvas fechadas que são a fronteira comum de domínios complementares outros (7), compreensivelmente, por volta da virada do século, a intuição comum era que poderia haver apenas dois tais domínios, um interior e outro exterior. Podemos apenas conjecturar acerca da influência sobre essa intuição exercida pela demonstração do teorema da curva de Jordan. De qualquer forma, Schoenflies, que recentemente forneceu uma tal prova e que pôde considerar-se um perito na topologia do plano, assim como um dos fundadores da topologia dos espaços euclidianos, publicou vários resultados nos quais supôs como fundamentado, por ser intuitivamente claro, que uma curva fechada podia admitir apenas dois domínios complementares. Ora, isso certamente foi ruim. Mas, foi ruim a sua influência no desenvolvimento da ma-

temática? Por exemplo, isso evidentemente foi considerado por L. E. J. Brouwer, o "pai" do moderno intuicionismo, e o inspirou a perquirir a validade da suposição. Eu conjecturo que isso ajudou a despertar o interesse de Brouwer por topologia (embora esse interesse possivelmente tivesse também outros estímulos) e que seu trabalho clássico a esse respeito (fornecendo contra-exemplos, entre os quais curvas fechadas que são a fronteira comum de uma família enumerável de domínios) alimentou esse permanente interesse. Em particular, isso o conduziu ao estudo da invariância topológica de curvas fechadas. Na prova dessa invariância, que ele foi o primeiro a fornecer, iniciou uma cadeia de idéias que conduziram à extensão da teoria da homologia a espaços gerais. Por vários anos após isso, ele esteve perfeitamente ativo nesse ramo da matemática, obtendo vários resultados que se tornaram clássicos (como seus teoremas de pontos fixos e trabalhos sobre aplicações de variedades localmente euclidianas) mas que somente uma década mais tarde foram plenamente apreciados pela corrente principal da topologia.

Aspectos comuns aos exemplos

Era falsa a intuição coletiva nos três exemplos que referi; ainda assim, é difícil crer que sua influência tenha sido inteiramente nociva. É curioso quanta matemática boa pode ser feita, mesmo quando é falsa a intuição coletiva pertinente a matérias básicas. Isso foi tanto mais notável durante o período que precedeu o exemplo de Weierstrass. Pois, durante esse período, era no mínimo im-perfeita e habitualmente evitada de erros a intuição coletiva pertinente à continuidade, à existência de derivadas, às séries infinitas, ao sistema dos números reais e a uma porção de outros conceitos fundamentais.

Ainda assim, muito da análise clássica foi construída sobre tal base. Seria bastante tão apropriado falar do "milagre moderno" quanto falamos do "milagre grego".

Falar do "milagre grego" evoca a crise clássica relativa à comensurabilidade. Também aqui, a intuição coletiva pertinente ao número e à grandeza, segundo a qual todas as grandezas eram comensuráveis, embora fosse falsa, foi capaz de sustentar muita matemática boa. Além disso, o descobimento final do seu verdadeiro caráter conduziu, em todos esses casos, a períodos muito fecundos da atividade matemática. É minha opinião pessoal que todos eles representem um fenômeno natural na evolução da matemática. Em cada caso, é forte a evidência de que o descobimento do erro na intuição básica estava prestes a irromper, por intermédio de vários matemáticos prominentes, todos trabalhando independentemente. No caso do descobimento da incomensurabilidade, alguns atribuíram-no ao próprio Pitágoras, outros a Hipaso (um discípulo de Pitágoras); a verdade, porém, é que ninguém o sabe. Não obstante, como o teorema de Pitágoras se tornou geralmente conhecido naquela época, a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado não poderia ficar escondida por muito tempo, pouco importando quem primeiro o percebeu. No caso do axioma das paralelas, Gauss, Bolyai e Lobachevski, todos descobriram os fatos pelo mesmo tempo. Hoje sabemos que Bolzano tinha um exemplo semelhante ao de Weierstrass. E, pelo mesmo tempo que Brouwer encontrou seu exemplo de uma curva fechada

"patológica", um matemático japonês, Wada, aparentemente produziu outro. E ninguém sabe quantos outros matemáticos ou estiveram trabalhando sobre a falsidade de cada uma dessas intuições coletivas ou produziram exemplos. O descobrimento da curva que preenche uma região, a que me referi casualmente, evidente constituiu outro caso típico. A representação paramétrica de curvas planas mostrou-se extremamente útil, embora evidentemente sua introdução (possivelmente por Cauchy) haja sido feita sob a influência da falsa crença de que tais curvas seriam sempre curvas do tipo intuitivamente aceito — isto, não possuindo largura ou espessura. Seguiu-se o modelo usual de eventos. Após muita pesquisa boa, baseada no conceito [intuitivo de curva plana], quase que simultaneamente, Peano, E. H. Moore e Hilbert apareceram com exemplos que mostravam ser falsa a intuição subjacente ao conceito de representação paramétrica (8). Seguiu-se um interstício de cerca de quarenta anos de pesquisa em topologia do plano e em problemas afins.

Papel da intuição na evolução dos conceitos

Que indicam esses estudos de caso no que tange aos modos segundo os quais os conceitos matemáticos evoluem no nível cultural? Proponho essa pergunta, pensando em duas coisas. Até agora, apenas referi casos nos quais a intuição coletiva era falsa — não expus casos nos quais ela fosse verdadeira — e, felizmente, a intuição matemática nem sempre está errada. Conseqüentemente, gostaria de citar alguns casos nos quais a intuição estava correta; porém, simultaneamente, gostaria de considerar como esses casos se ajustam aos anteriores, por assim dizer, forçando a formulação de novos conceitos.

Começemos com o conceito mais básico de todos, a saber, o conceito de número; mais especificamente, os números para contar ou números naturais, 1, 2, 3 A filosofia intuicionista considera a origem deles como a intuição humana das "séries fundamentais" de atos mentais, consistentes em um primeiro ato, um segundo ato, um terceiro ato etc. Suponho que essa seja uma intuição derivada do ambiente físico e cultural. Mais especificamente — e isso pode inferir-se do estudo das formas dos nomes numerais primitivos assim como da prática de contar — o uso de correspondência biunívoca para comparar coleções de objetos físicos, aliado ao caráter repetitivo da determinação verdadeira de tais correspondências, formando um conjunto de atitudes que constituem, em última instância, a intuição das séries fundamentais. E presumo que essa tenha sido uma intuição no nível cultural, partilhada virtualmente por todos que julgaram necessário ocupar-se com as formas primitivas de contar. Provavelmente, na gênese da geometria, esteve atuante um tipo análogo de intuição, o qual foi necessário para comparar comprimentos e áreas. Certamente que tudo isso é muito conjectural, porém parece representar razoavelmente o que ocorreu antes daqueles períodos dos quais os registros históricos são mais completos. E é nosso exemplo mais antigo de como a intuição correta, no nível coletivo, serve para construir o edifício matemático.

Contudo, foi uma intuição que terminou por conduzir a conceitos que produziram a "crise grega"; e foi necessário que Eudoxo e seus contemporâneos criassem um novo arcabouço conceitual que,

embora contivesse a maior parte do antigo, rejeitava as partes que se mostraram falsas. Seguiu-se aquele desabrochar de atividade a que chamamos "milagre grego", baseado em uma intuição do conceito de número - as denominadas grandezas geométricas - a qual permitiu a construção ulterior da teoria matemática em cima da antiga teoria dos pitagóricos. Embora expressa na linguagem da geometria, essa intuição compreendia virtualmente uma teoria completa do sistema dos números reais. Infelizmente, o caminho tomado pela cultura ocidental impediu o desenvolvimento ulterior da intuição grega. E apenas recentemente a atividade em análise matemática, baseada nos fundamentos assentados pelos gregos e por seus sucessores (que acrescentaram nova representação simbólica para os números), trouxe à luz a impropriedade da intuição criada pelo trabalho de Eudoxo. Pela segunda metade do século XIX, a análise real alcançou uma formulação mais precisa do contínuo dos números reais mediante a noção de conjunto. A denominada "aritimetização da análise por Weierstrass e por outros forneceu uma nova concepção do contínuo real e tornou possível a teoria da medida e as brilhantes pesquisas da primeira metade do presente século, tanto em análise como em topologia.

Porém essa nova concepção do contínuo real deu à luz uma nova intuição — a da teoria dos conjuntos. O trabalho de Cantor foi a formulação dessa nova intuição. Algumas de suas falhas foram logo descobertas sob a máscara de contradições teóricas. Presentemente, que a comunidade matemática desenvolveu novos cânones de rigor, se compreendeu que o remédio deve ser buscado em uma formulação mais precisa da teoria dos conjuntos. O método axiomático, usado pelos gregos para evitar os paradoxos de Zenão e a presunção de comensurabilidade, alcançava um novo nível de maturidade e novamente oferecia um método para atingir a precisão pretendida. Para desígnios mais comuns, os sistemas axiomáticos da teoria dos conjuntos forneciam uma base bastante satisfatória. Porém, no que tange a uma formulação única da teoria geral de conjuntos, encontramos hoje em dia em uma situação pouco melhor que a dos pitagóricos relativamente à geometria ou que a dos primeiros analistas relativamente ao contínuo real. Nosso conhecimento do axioma da escolha, por exemplo, é puramente intuitivo. Temos um acervo de boa matemática fundado em seu uso, porém nos sentimos inquietos acerca de suas consequências paradoxais, como o teorema de Banach-Tarski ⁽⁹⁾. Outro tanto ocorre à hipótese do contínuo, embora isso talvez não seja tão sério para a maioria de nós. Contudo, serve como um memento de que nossa intuição do contínuo real não foi inteiramente elucidada pelo trabalho de Weierstrass e de seus contemporâneos. Eles produziram, forçosamente, uma nova intuição - a teoria dos conjuntos — e, desde que essa teoria possui apenas uma base intuitiva, toda a matemática deve depender dela.

Penso que apenas uma conclusão se pode extrair disso tudo, qual seja, de que os intuicionistas estão corretos, no tocante a estar a matemática, em última instância, baseada na intuição. Porém a noção de intuição matemática que vim usando não é precisamente a noção do intuicionismo; e, além disso, os métodos usados pela maioria dos matemáticos não são os da doutrina intuicionista.

Resumimos o papel da intuição matemática na evolução dos conceitos matemáticos, notando que nossa intuição dos conceitos básicos cresceu por uma série de descobrimentos de aspectos defei-

tuosos dos conceitos vigentes e pela ulterior substituição por novos conceitos os quais, não apenas explicam os defeitos mas conduzem a uma exaltada atividade no novo fundamento e à conseqüente criação de matemática muito boa. Finalmente, os novos conceitos começam a revelar defeitos; particularmente, descobrimos que eles introduzem novas intuições que se devem tornar conceitualmente mais precisas. E o ciclo continua.

Papel da intuição na pesquisa

Tratemos agora do papel da intuição na pesquisa. Os comentários biográficos nos escritos de Poincaré e o trabalho mais completo de Hadamard (10) incorporam uma boa exposição de como a intuição opera no nível individual no trabalho criativo. Conforme assinalai, trata-se de uma intuição de natureza altamente especializada. Refere-se ao problema particular com que somente o indivíduo ou poucas pessoas estão trabalhando. Certamente é verdade que tais pessoas se fundamentam na intuição coletiva e que esta as influencia. Particularmente, a escolha do problema com que se ocupam é guiada pelo que a intuição coletiva julga seja a direção mais fecunda de pesquisa. Escolhido, porém, o problema, o indivíduo começa a construir novos conceitos e as intuições resultantes. De certo modo, ele repete a experiência da cultura matemática geral, porém em um nível diferente e a uma maior taxa de mudança. Habitualmente, suas intuições falsas são assim reconhecidas em um lapso de tempo relativamente curto ("relativamente curto" pode significar vários anos) e emendadas com conceituação correta.

Essas notas aplicam-se, também, no caso de problemas que permanecem irresolutos por muitos anos e se tornam "clássicos". Os indivíduos experientes, considerando frustrados os esforços despendidos na tentativa de solução, podem ter parado de se ocupar deles e migrado para problemas que prometem resultados mais rápidos. Penso que, nesse caso, a intuição coletiva no campo de um problema particular continua a crescer, sendo transmitida pelos antigos investigadores aos novos. Finalmente, em decorrência da combinação de uma intuição coletiva mais amadurecida (que teria crescido impercebida) com novos métodos e gênio individual, alguém (habitualmente, um matemático mais jovem, relativamente novo no campo e detentor de uma intuição individual fresca) resolve o problema. Estou convicto de que tem uma base firme esse sentimento de reverência que muitos matemáticos criativos mais velhos experimentam perante a potência da geração jovem de praticantes criativos. O jovem não somente se adentra no campo particular sem ter que atravancar seu cérebro com conceitos e métodos que tiveram serventia e que agora são refugados mas, usando novos conceitos e métodos, construiu uma intuição individual que se configura em um terraço do qual ele pode contemplar seu campo de pesquisa com olhar não enturvado pelo acúmulo de intuições anteriores e deficientes. O orientador de sua primeira pesquisa não tem maior responsabilidade que a de guiar e dirigir essa jovem intuição pelos canais conceituais mais atualizados. É quase um truísmo dizer que, sem intuição, não há criatividade em matemática.

Papel da intuição no ensino

Assim como a intuição coletiva, a intuição matemática individual não é estática mas se desenvolve. Começa a desenvolver-se em nossa infância, pela época em que aprendemos a distinguir formas e tamanhos (intuição geométrica) e a contar (intuição aritmética). Não nascemos com ela, pois, sem uma base cultural para seu desenvolvimento, a intuição matemática parece inexistir. Contudo, em nossa cultura, na época em que ingressa na escola, a criança habitualmente tem uma base sobre a qual construir — por exemplo, provavelmente seus pais a ensinaram a contar — e o desenvolvimento continuado dessa base indubitavelmente constitui uma das responsabilidades centrais dos professores do primeiro grau.

Na época em que alcança o segundo grau, o estudante deve ter uma base intuitiva razoavelmente vultosa com que trabalhar. Presumivelmente, seus professores recorreram à intuição aritmética dele para desenvolver tanto a aritmética superior como a álgebra e — pelo menos no âmbito de novas idéias curriculares — sua intuição geométrica, não apenas para lidar com os fatos elementares mas para auxiliar na resolução de problemas aritméticos e algébricos. E, nesse processo, o professor deve haver aumentado a base intuitiva [do estudante]. Em resumo, quando o estudante chega aos professores do segundo grau, seu enxoval matemático deve conter dois componentes principais — o componente intuitivo e o componente instrutivo. É difícil separá-los, particularmente porque o componente intuitivo depende, para crescer, do componente instrutivo.

Talvez eu possa tornar isso mais claro, expondo minha visão do que deve executar o novo currículo que se está presentemente elaborando, em oposição ao currículo matemático antigo. O antigo currículo foi projetado principalmente para o componente instrutivo: ao estudante ensinava-se a efetuar operações aritméticas e algébricas e a provar teoremas. Porém ocorria conscientemente pouco desenvolvimento da intuição matemática. Essa manifestava-se, principalmente, na resolução dos problemas propostos. Porém, na medida em que tais problemas constituíam repetição mecânica das operações ou dos modos de prova que eram ensinados, pouco ou nada acrescentavam ao componente intuitivo. Em oposição a esse, o novo currículo deve tentar converter o ensino do componente instrutivo em um processo pelo qual a intuição do estudante seja efetivamente usada e desenvolvida a um nível posterior, durante a aquisição do novo conhecimento.

Por exemplo, enquanto no velho sistema ao estudante se ensinava a fórmula para execução de um procedimento, no novo [sistema] o estudante deve ser convidado a tentar prever a que forma o procedimento conduzirá. Essa previsão e a experimentação associada, conduzindo a uma decisão quanto ao resultado final, desenvolve e reforça a sua intuição matemática. De um modo embrionário, esse procedimento é exatamente o mesmo perseguido pelo pesquisador em matemática e, na minha opinião, o professor que o cultiva está fazendo um trabalho criativo. Acredito, também, que todos os conceitos devam ser apresentados dessa forma. Explicar um conceito a um estudante enriquece o seu componente instrutivo mas não fortalece sua intuição. Provavelmente, o pior exemplo desse tipo de coisa é a

escrita de uma definição no quadro, seguida da explicação de seu significado e de sua utilidade.

Por exemplo, considere o princípio da indução matemática. Podemos adotar o procedimento seguinte: primeiro, escrevemo-lo no quadro sob a forma na qual é habitualmente enunciado como axioma; em seguida, explicamos o seu significado; finalmente, mostramos como se usa na prova de fórmulas aritméticas simples. Isso é seguido do dever-de-casa, no qual o estudante aplica o processo antes como um algoritmo de prova, imitando o que o professor fizera. Os estudantes mais brilhantes talvez não enfrentarão dificuldade alguma com isso, enquanto os estudantes medianos serão confundidos por questões secundárias, tais quais: "Como encontrarei o termo de ordem $n+1$?" - questões que se vinculam em grande parte ao caráter algorítmico do que lhes foi ensinado.

Ora, esse tipo de ensino não auxiliará o estudante a reconhecer que o princípio da indução matemática pode ser invocado, quando futuramente se lhe deparar um problema no qual a indução matemática constituir um modo natural de prova ou de definição. Pois, embora ele possa "saber" a indução matemática, ele não obteve uma sentimento intuitivo dele. Se, por outro lado, seu professor acreditasse que ele sabia contar e que tinha uma intuição das "séries fundamentais" e se daí o conduzisse ao descobrimento do princípio da indução matemática, então o estudante obteria não apenas um conhecimento do princípio mas também uma base intuitiva para o futuro reconhecimento de casos aos quais se poderia aplicar o princípio. Dessa forma, a intuição poderia desempenhar seu próprio papel no ensino criativo.

Talvez professores experientes já usem tais métodos de ensino criativos e não cogitem de apresentar uma definição sem antes demandar que as faculdades intuitivas do estudante o ajudem a formular tal definição. Duas coisas, contudo, me inquietam: Primeira, que os professores, sob a pressão de apertar uma certa quantidade de material em um certo lapso de tempo, possam considerar necessário recorrer ao antigo modo de ensino, que consiste em (a) apresentar a definição, (b) explicar a definição e (c) aplicar o conceito a um problema particular. Na discussão do denominado "método didático de Moore" - que exemplifica muito do que descrevi - Moise comentou que "o conhecimento puro não desempenha um papel crucial no desenvolvimento matemático, como o supõe muita gente" (11). E a respeito do tempo despendido no uso do método de Moore, ele declarou: "A ignorância decorrente deveria ser um empecilho irremediável mas de fato não no é; e a única forma que vejo de resolver esse paradoxo consiste em inferir que a matemática pode ser ensinada como *atividade* e que o conhecimento adquirido desse modo tem um poder desproporcional à sua magnitude." E do segundo volume do recente livro de Polya, *O Descobrimento Matemático* (12), consta uma citação de Lichtenberg, físico do século XVIII: "Aquilo que você foi conduzido a descobrir por si mesmo deixa uma senda em sua mente que você pode tornar a percorrer, quando for necessário." Isso é um modo expressivo de dizer que assim estamos aumentando o acervo de nossa intuição matemática.

A segunda coisa que me preocupa vincula-se ao uso do método axiomático no ensino secundário, particularmente quando o objetivo é definir. Aqui se aplica o que antes expus relativamente à indução

matemática. O estudante não deve ser iniciado em uma teoria mediante axiomas. Consideremos a aritmética dos números inteiros. Essa é uma teoria com que ao estudante já é familiar, uma circunstância que a torna uma excelente matéria para uma introdução apropriada à axiomática. Contudo, antes de propor qualquer axioma, o professor deve respeitar a imaginação do estudante o bastante para lhe revelar um pouco acerca do objetivo da axiomática. Em particular, devemos dizer-lhe que desejamos procurar alguns aspectos específicos da aritmética dos números inteiros dos quais possamos derivar os outros; pois, tendo feito assim, não somente poderemos verificar a exatidão de uma operação diante da base axiomática como também experimentar nossa imaginação, encontrando outros modelos, que não os números inteiros, para todos ou alguns dos axiomas — por exemplo, a aritmética dos números racionais e a álgebra elementar.

Depois de haver decidido tentar enumerar axiomas, o estudante deve ser encorajado a, ele próprio, descobrir axiomas adequados — certamente sob a direção do professor. Todavia, é dispensável dizer que se esses tópicos forem muito avançados para que os estudantes o compreendam, então o método axiomático não deve nunca ser introduzido. Nem devem os axiomas ser introduzidos furtivamente, disfarçados nas denominadas “leis”, supostamente legadas por algum obscuro Moisés matemático.

Acredito que isso se aplique, em grande parte, ao ensino do terceiro grau — certamente até o fim dos dois anos iniciais. Conforme o estudante progrida a trabalhos mais avançados, o componente intuitivo de sua habilitação começa a adquirir maior importância. Nessa fase de sua carreira, podemos admitir que o estudante vá desenvolver algum tipo de trabalho criativo, senão em matemática, em alguma outra ciência. E é desejável que seus professores tenham tido alguma experiência com trabalho criativo. Isso não significa que o professor deva ter concluído o doutoramento; isso é um talismã do qual gostaria de que pudéssemos livrar-nos. Prefiro um professor sem PhD, arrebatado pela matemática, que possa ensiná-la criativamente a um professor com PhD que nem se estimule com a matemática nem seja capaz de inspirar seus estudantes. Naturalmente, à medida que o estudante progrida em trabalho de pós-graduação, a maior parte de seus professores certamente terá PhD, já que eles próprios ou estarão desenvolvendo trabalho criativo ou, pelo menos, já desenvolveram trabalho suficiente para compreender o papel da intuição nesse tipo de trabalho e a importância do uso de métodos que a desenvolvam. O estudante graduado deve ser capaz de incrementar por si mesmo o componente instrutivo; a responsabilidade de seu mentor consiste principalmente em nutrir sua intuição matemática, pois isso é que será de maior importância em sua carreira como matemático.

Resumo

“Intuição”, segundo o uso pelos matemáticos modernos, significa um acervo de atitudes (incluindo crenças e opiniões), derivadas da experiência tanto individual quanto cultural. Está estreitamente associada ao conhecimento matemático, que constitui a base da intuição. Esse conhecimento contribui ao crescimento da intuição e, por sua vez, é aumentado por novos materiais conceituais sugeridos pela intuição.

O papel principal da intuição é fornecer uma fundação conceitual que aponte as direções que as novas pesquisas poderão tomar. A opinião de cada matemático com respeito à existência de conceitos matemáticos (número, noções geométricas e quejandos) é sustentada pela intuição; freqüentemente, essas opiniões se mantêm com tanta firmeza que merecem o qualificativo de "platônicas". O papel da intuição na pesquisa é suprir a "adivinhação educada", que se pode revelar verdadeira ou falsa; porém, em ambos os casos, o progresso não se consegue sem ela e mesmo uma adivinhação falsa pode conduzir ao progresso. Assim, a intuição também desempenha um papel relevante na evolução dos conceitos matemáticos. O avanço do conhecimento matemático, periodicamente, revela falhas na intuição cultural; isso produz "crises", cuja solução conduz a uma intuição mais amadurecida.

A base extrema da matemática moderna é pois a intuição matemática e é nesse sentido que está correta a doutrina intuicionista de Brouwer e de seus adeptos. Os métodos modernos de ensino reconhecem o papel da intuição, ao substituírem o modo de instrução "faça isso àquilo" por uma atitude "que deve ser feito em seguida?", a qual invoca a infra-estrutura intuitiva previamente desenvolvida. Dessa forma a compreensão e a apreciação do conhecimento matemático podem ser adequadamente incutidas aos estudantes.

Referências e notas

1. NEWMAN, J. R. *The World of Mathematics*. (New York, Simon and Schuster, 1956), pp. 1956-1976.
2. C. S. Yoakum, comunicação pessoal.
3. R. Descartes, in: *The Philosophical Works of Descartes*, E. S. Haldane & G. R. T. Ross, trad. (Cambridge, Cambridge University Press, 1911).
4. WILDER, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics* (New York, Wiley, ed. 2, 1965), pp. 211-212 e capít. 10. A filosofia intuicionista defende que toda a matemática deve ser fundada na noção de seqüência "dada intuitivamente" (como uma seqüência de atos), que tem um primeiro elemento, um segundo elemento etc. De acordo com os princípios intuicionistas, a seqüência dos números naturais, 1, 2, 3, ..., é o modelo matemático de tal seqüência e somente se podem aceitar como matematicamente válidos os conceitos que se podem elaborar sobre essa seqüência mediante métodos *construtivos*. A aceitação desses princípios limitaria severamente a moderna conceituação matemática e excluiria determinados métodos de prova. Por exemplo, não se aceitaria a prova de existência por contradição (*contradictio ad absurdum*). Sob uma forma ainda mais restritiva, os princípios do intuicionismo devem buscar-se nas doutrinas de L. Kronecker, famoso matemático do século XIX.
5. Cf., por exemplo, P. FRANKLIN, in *Galois Lectures* (New York, Scripta Mathematical Library, 1941).
6. Um simples exemplo encontra-se em T. H. HILDEBRAND, *Amer. Math. Mon.* **40**, 547 (1933).

7. Descrevem-se exemplos em R. L. WILDER, *Mathematical Teacher* **55**, 462 (1947).
8. Cf. J. W. Young, *Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (New York, Macmillan, 1916), pp. 167-170. Todavia, é falsa a declaração de Young de que essa é uma correspondência biunívoca entre o quadrado e os pontos de um intervalo de números reais.
9. "Uma esfera unitária sólida pode ser decomposta em um número finito de partes que se podem reunir para formar duas esferas unitárias sólidas." Encontra-se uma breve discussão E. KASNER e J. NEWMAN, *Mathematical and the Imagination* (New York, Simon and Schuster, 1940), p. 206-207; para minúcias técnicas, cf. S. BANACH e A. TARSKI, *Fund, Math.* **6**, 244 (1924); R. M. ROBINSON [*ibidem* **34**, 246 (1947)] mostra que o número mínimo deve ser 5.
10. J. HADAMARD, *The Psycholog of Invention in the Mathematical Field* (Princeton, Princeton University Press, 1949).
11. E. E. MOISE, *Amer. Math. Mon.* **72**, 407 (1965).
12. G. POLYA, *Mathematical Discovery* (New York, Wiley, 1965), vol. 2, p. 103.

Título original:

The Role of Intuition

Science, vol. 156 (**1967**), p. 605-610.