

"Penso que os matemáticos devem tentar dissipar a impressão popular de que também eles sejam autômatos destituídos de percepção."
(BIRKHOFF, p. 458)

1 - Introdução

A invenção constitui um dos mais instigantes aspectos da atividade matemática. O seu estudo introspectivo, tanto quanto eu saiba, foi inaugurado pelo matemático Henri Poincaré (1854-1912), em palestra proferida em Paris, perante a Sociedade de Psicologia (POINCARÉ, p. 57).

Um outro matemático, Jacques Hadamard (1865-1963), examinando a literatura disponível, constatou, por um lado, que os psicólogos Édouard Claparède e Théodore Flournoy haviam empreendido uma investigação mediante um questionário consistente em uma trintena de incisos. Mas, dentre as pessoas que responderam à inquisição, talvez apenas duas fossem representativas da classe de personalidades criativas. (HADAMARD, p. 8-10)

Hadamard verificou, por outro lado, que a descrição da atividade matemática formulada pelo psicólogo Étienne Souriau corresponde à atitude assumida por estudantes medíocres. Por isso, veio a advogar, em 1945, que o estudo da invenção matemática seja conduzido por pessoas competentes nas duas disciplinas, psicologia e matemática (HADAMARD, p. 64 e p. 1).

Esse tipo de pesquisa tem sido desenvolvido mediante questionários e depoimentos, tendo, portanto, caráter idiográfico (CHANGEUX & CONNES, p. 113). Já foi sugerido que se inicie uma investigação pelo método experimental, alegando-se que ocorre invenção desde que a solução do problema seja nova para o indivíduo (GUILLAUME, p. 229). Talvez, nesse caso, o compromisso com o método experimental reduza severamente o âmbito da atividade pesquisada. (A minha escolha da locução atividade inventiva, ao invés da mais freqüente atividade criativa, foi determinada pela maior denotação daquela, já que o termo inventivo reúne as acepções de encontrar e de criar, eximindo-me, assim, de versar sobre quesitos epistemológicos.)

2 - Os níveis da atividade em matemática

Distinguem-se três níveis psíquicos na atividade dos matemáticos.

- (a) O primeiro é o nível lógico e consiste na aplicação de regras, que podem ser bastantes simples, como as propriedades operativas dos números inteiros, ou mais elaboradas, como o cálculo da primitivas de uma função ou o traçado do gráfico de uma

curva. A tecnologia disponível permite aos computadores digitais efetuar tais operações (CHANGEUX & CONNES, p. 127). A verificação da validade de um argumento proposto para um dado teorema situa-se nesse nível. Já se programam computadores para produzir demonstrações de teoremas simples da geometria euclidiana (CHANGEUX & CONNES, p. 129) e espera-se que, em breve, seja possível redigir programas destinados a verificar a validade de argumentos.

Existem pessoas, freqüentemente pouco instruídas, que, em um mínimo lapso de tempo, sem o recurso ao papel e ao lápis, são capazes de multiplicar números que, na base decimal, se representam com mais de nove algarismos. Conhecem-se poucos matemáticos que desfrutaram dessa capacidade (HADAMARD, p. 58-59) e é significativo que esse nível de atividade haja atraído, mais que os outros, a atenção de alguns psicólogos. Também há pessoas que pensam segundo uma modalidade que se pode qualificar como puramente racional. Para elas, dois teoremas se equiparam, desde que lhes sejam propostos argumentos corretos. Tais pessoas não transpõem o nível lógico da atividade matemática.

- (b) O segundo é o nível crítico e consiste na reflexão sobre o significado dos cálculos efetuados e sobre a sua adequação. Mas não se exaure nessas operações. É nesse nível que se constroem e se modificam hierarquias de valores, inexistentes no nível lógico. No acesso ao nível crítico, a emoção desempenha papel essencial (CHANGEUX & CONNES, p. 127-128; DAMÁSIO, p. 12).
- (c) O terceiro é o nível inventivo e consiste na capacidade tanto de resolver problemas anteriormente propostos como de descobrir uma parte da matemática à qual os conhecimentos adquiridos não dão acesso imediato. "Chegamos a colocar problemas novos, a abrir vias anteriormente inacessíveis e a descobrir uma parte da geografia da matemática." Nesse nível criam-se instrumentos de pensamento que não existiam no *corpus* instituído (CHANGEUX & CONNES, p. 127-128).

3 - As fases psíquicas da invenção

Distinguem-se quatro fases na invenção matemática (HADAMARD p. 56).

- (a) A primeira é a fase da preparação (POINCARÉ, p. 13; HADAMARD, p. 45). Nessa fase, os matemáticos comportam-se distintamente. Alguns, como Henri Poincaré, pensam arduamente sobre um dado problema, até que decidem abandoná-lo (HADAMARD p. 56). Outros, como o contemporâneo Michael Atiyah, preferem "navegar nas águas matemáticas", refletindo sobre diversas coisas, conversando com os colegas, até que lhes surge alguma idéia nova,

que eles procuram articular a outras (ATIIYAH, p. 5). Nessa fase, um matemático, que procure descobrir um fato acerca de um espaço de Hilbert de dimensão infinita, efetua experimentos mentais, examinando minuciosamente o que ocorre em duas e em três dimensões (HALMOS, p. 381). Por outro lado, quando não consegue resolver um problema específico, pode estendê-lo a todo um gênero, buscando a solução no âmbito geral, para obter o caso específico como consequência (CHANGEUX & CONNES, p. 117).

- (b) A segunda é a fase da incubação, na qual o problema é afastado da consciência. Na descrição dessa fase, Poincaré refere a elaboração de uma resposta pelo inconsciente ou eu subliminar, comentando que "o eu subliminar não é em nenhum aspecto inferior ao eu consciente; não é puramente automático; é capaz de discernimento; tem tato e delicadeza; sabe escolher e adivinhar. [...] Sabe melhor adivinhar que o eu consciente, pois obtêm bom êxito onde aquele fracassa." (POINCARÉ, p. 56-57) E cita alguns casos nos quais isso lhe ocorreu.

Hadamard insiste na distinção entre inconsciente e subconsciente, comparando o último à visão periférica, por oposição à consciência, análoga à visão focal; e afirma que somente os conteúdos subconscientes são acessíveis à introspecção (HADAMARD, p. 25-26). Parece-me que, ao usar o termo inconsciente, Poincaré pensava na acepção introduzida por Pierre Janet (1859-1947): um ato inconsciente é uma "action ayant tous les caractères d'un fait psychologique sauf un, d'être toujours ignoré par la personne même qui l'exécute au moment même où elle l'exécute" (FILLOUX, p. 19).

Roger Penrose, matemático contemporâneo, narra que, após haver trabalhado arduamente no problema das singularidades dos buracos negros, estava conversando socialmente com um colega, enquanto andavam na direção do escritório. A conversa fora interrompida, enquanto atravessavam a rua e, durante aquele lapso de tempo, lhe ocorreu uma idéia, que logo foi afastada, ao se reiniciar a conversa. Mais tarde, sentindo-se empolgado, procurou lembrar o que lhe teria causado esse sentimento. Tornou a lembrar-se daquela idéia, que efetivamente fornecia a solução do problema com que se ocupara (PENROSE, p. 464-466).

Também se pode invocar o caso do químico Kekule von Stodnitz (1829-1896) que, após meditar insistentemente acerca de uma estrutura viável para o benzeno, sonhou com o uróboro, serpente que morde a própria cauda, antigo símbolo egípcio referido em textos de alquimia. Depois que acordou, propôs para o benzeno a estrutura hexagonal (o núcleo benzênico) (NEUMANN, p. 28-29; SCHOENBERG, p. 99).

Para explicar esse processo, já se propôs que operam sucessivamente duas funções cognitivas, sendo uma geradora de diversidade e a outra avaliadora, ligada à afetividade.

- (c) A terceira é a fase da iluminação, que se inicia, quando advém uma visão clara do problema sobre o qual tanto se meditou e

que foi, temporariamente, esquecido. Por oposição à primeira, essa fase se reveste de grande carga afetiva. O matemático contemporâneo Alain Connes, detentor da medalha Fields (1982), relatou que, nas raras vezes que lhe ocorrera a iluminação, ele fora possuído de tão intensa emoção, que não pudera evitar lhe viessem lágrimas aos olhos (CHANGEUX & CONNES, p. 114).

Compreender um teorema não equivale a compreender, passo a passo, uma demonstração, cuja leitura pode demorar várias horas. Trata-se de ver a totalidade da demonstração em um pequeno lapso de tempo (CHANGEUX & CONNES, p. 119). Habitualmente, a iluminação precede a demonstração. Mas há pelo menos um caso em que isso não ocorreu, referido pelo matemático Michael Atiyah, detentor da medalha Fields (1966).

"Lembro-me de um teorema que consegui provar, sem enxergar verdadeiramente a razão de sua validade. Preocupou-me por anos e anos. Estava ligado à relação entre a teoria K e a representação de grupos finitos. Para demonstrar o teorema, tive de decompor o grupo em grupos solúveis e grupos cíclicos; havia longas cadeias de induções e muitos obstáculos no caminho. Para que a prova funcionasse, cada minúcia devia estar bem feita. Por assim dizer, precisei de muita sorte. Fiquei maravilhado, ao perceber que tudo funcionava e continuei pensando que, se um único elo da cadeia se rompesse, se houvesse uma única lacuna na argumentação, ocorreria o colapso da prova toda. Como eu não a compreendia, podia perfeitamente ser falsa. Fiquei preocupado e, apenas cinco ou seis anos mais tarde, vim compreender a correção da prova. Nesse momento, encontrei uma prova completamente diferente, substituindo grupos finitos por grupos compactos. Assim, com outras técnicas, ficou claro que tudo estava certo." (ATIYAH, p. 14-15)

- (d) A quarta é a fase da exposição, na qual o matemático descreve os resultados por ele obtidos, de sorte que outros possam entendê-lo. Nessa fase são propostas definições de novos conceitos e são elaboradas as provas, instrumentos psicológicos usados com a finalidade de convenceremos nossos interlocutores do que estamos afirmando (USPENSKY, p. 10-11). É nessa fase que se exerce sobremodo o que DAVIS e ANDERSON denominaram matemática analítica:

"In analytic mathematics, the symbolic material predominates. It is almost always hard to do. It is time consuming. It is fatiguing. It requires special training. It may require constant verification by the whole mathematical culture to assure reliability. Analytic mathematics is performed only by very few people. Analytic mathematics is elitist and self-critical. The practitioners of its higher manifestations form a 'talentocracy'. The great virtue of analytic mathematics arises from this, that while it is

hard to verify another's intuitions, it is possible, though often difficult, to verify his proofs." (O grifo é meu.) (DAVIS & ANDERSON, p. 113)

No exemplo anterior de Atiyah, a primeira prova servira para persuadir ao próprio autor da veracidade do resultado. Mas ele próprio narra que, "quando o teorema do índice fora formulado, sabíamos [Singer e eu] que ele era verdadeiro. Mas demoramos um par de anos para achar uma prova. Isso foi em parte, porque havia técnicas diferentes envolvidas e porque fui obrigado a aprender novas coisas para conseguir a demonstração e, nesse caso, várias demonstrações. Não dou muita importância a provas. É mais importante compreender."

Conclui Atiyah, afirmando que "a demonstração é importante, porque confirma a compreensão. Posso achar que compreendo mas a demonstração é a censura de minha compreensão e nada mais. É a última fase da operação — uma última revisão — mas não é, de forma alguma, o ponto fundamental." (ATIYAH, p. 14)

Parece-me que no estilo de trabalho do matemático contemporâneo William P. Thurston, detentor da medalha Fields de 1982, a terceira e a quarta fase não se distinguem claramente. Em seu depoimento acerca do teorema da geometrização para variedades de Haken, ele afirma que:

"It was a hard theorem, and I spent a tremendous amount of effort thinking about it. When I completed the proof, I spent a lot more effort checking the proof, searching for difficulties and testing it against independent information.

"I'd like to spell out more what I mean when I say I proved this theorem. I meant that I had a clear and complete flow of ideas, including details, that withstood a great deal of scrutiny by myself and by others." (O grifo é meu.) (THURSTON, p. 174)

Referindo-se propriamente à quarta fase da invenção, Thurston declara: "However, there is sometimes a huge expansion factor in translating from the encoding in my own thinking to something that can be conveyed to someone else." (THURSTON, p. 174)

Assim, enquanto essa última fase se vincula à *ars disse-
rendi*, as três outras fases se prendem à *ars inveniendi*. A distinção entre ambas as artes é manifesta em dois artigos escritos por Van der Waerden. No primeiro, publicado em 1927, quando o autor contava vinte e poucos anos, é provada uma conjectura de Baudet; no segundo, editado em 1965, é narrado como ele encontrou essa prova.

- ATIYAH, Michael (1985), Por que fazer matemática? Entrevista com Robert Minio. *Matemática Universitária*, nº 2, p. 2-19
- BIRKHOFF, Garret (1969), Mathematics and psychology. *SIAM Review*, vol. 11, n. 4, October, p. 429-469
- CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNES, Alain (1991 [1989]), *Matéria pensante*. Lisboa, Gradiva.
- DAMÁSIO, António R. (1996 [1994]), *O erro de Descartes - emoção, razão e o cérebro humano*. São Paulo, Companhia das Letras.
- DAVIS, Philip J.; ANDERSON, James A. (1979), Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education. *SIAM REVIEW*, vol. 21, n. 1, January, p. 112-127
- FILLOUX, Jean-Claude (1977 [1947]), *L'inconscient*. Paris, Presses Universitaires de France.
- GUILLAUME, Paul (1963 [1960]), *Manual de psicologia*. São Paulo, Companhia Editora Nacional.
- HADAMARD, Jacques (1954 [1945]), *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, Dover Publications.
- HALMOS, Paul (1968), Mathematics as a creative art. *American Scientist*, 56, p. 375-389
- MOISE, Edwin (1963), *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley.
- NEUMANMN, Erich (1990 [1968]), *História da origem da consciência*. São Paulo, Editora Cultrix.
- PENROSE, Roger (1991 [1989]), *A mente nova do rei*. Rio de Janeiro, Editora Campus.
- POINCARÉ, Henri (1948 [1913]), Mathematical creation. *Scientific American*, nº 179, p. 54-57
- SCHOENBERG, Mário (1985), *Pensando a física*. São Paulo, Editora Brasiliense.
- SUNDHOLM, Göran (1993), Questions of proof. *Manuscrito*, Universidade Estadual de Campinas, vol. XVI, nº 2, p. 47-70, outubro.
- THURSTON, William P. (1994), On proof and progress in mathematics. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, volume 30, number 2.
- USPENSKY, V. A. (1987), *Gödel's incompleteness theorem*. Moscovo, Mir Publishers.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1927), Beweis einer Vermutung von Baudet. *Nieuw. Archf. Wisk.* (2), 15, 212-216.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1965), Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde. *Abh. math. Semin. Univ. Hamburg* 28, 6-15.