

A morte de uma teoria matemática: um estudo na sociologia do conhecimento

Charles S. Fisher
Departamento de Sociologia e Antropologia
Princeton University

Comunicado por C. Truesdell

Traduzido por Marcelo Papini

"Um rei é um escravo da história."
Conde LEO TOLSTOY

I. Introdução

Para os matemáticos, uma teoria é uma coleção de idéias relativas a objetos matemáticos [1]. Essas idéias podem abranger um corpo vasto de trabalhos matemáticos que possuem raízes e aplicações em outras tais teorias amplamente difundidas ou podem confinar-se a um sistema autônomo de teoremas. Para um observador, por outro lado, uma teoria matemática afigurar-se-á como um lugar de atividade, vagamente definido, ao qual um matemático se reporta, quando conversa com seus pares. Se as observações forem conduzidas durante um certo intervalo de tempo ou em meio a diferentes grupos de matemáticos, então essa vaguidade aumenta grandemente. Nota-se que os matemáticos, em diversas épocas e em lugares distintos, decompõem diferentemente o seu mundo da matemática. Com efeito, muitos matemáticos discordam acerca do conteúdo desse mundo da matemática. Essa discordância não se restringe às grandes contendas da história da matemática mas pode ser detectada nos comentários fortuitos de matemáticos acerca do trabalho habitual de seus colegas.

Essa variegada classificação das atividades matemáticas pelos matemáticos constitui um dos traços mais notáveis da evolução das idéias matemáticas. Matemáticos que se dizem praticantes de uma dada especialidade enxergam o desenvolvimento da matemática nos termos das ideologias de sua especialidade. Esses modos de enxergar surgem ao longo do tempo e, coligidos em um certo instante, compõem uma descrição do mundo nesse instante. Além disso, no interior desse meio ambiente, uma teoria está sujeita a diferentes interpretações. Portanto, para o observador, tanto em uma ocasião quanto ao longo do tempo, uma teoria não é um objeto fixo mas uma categoria social que se transforma à medida que mudam as perspectivas dos matemáticos.

O seguinte ensaio examina os modos pelos quais diversos grupos de matemáticos caracterizaram uma teoria que, nos fins do século dezenove, esteve no centro do interesse matemático. Nas décadas de 1880 e 1890, achava-se que a teoria dos invariantes houvesse unificado muitos ramos da matemática mas, por volta de

1940, indagados sobre essa teoria, os matemáticos teriam dito que ela estava morta. Enquanto, em 1890, foram resenhados em um periódico matemático quarenta e dois artigos sobre a teoria dos invariantes, em 1940 apenas cinco artigos apareceram sob a mesma rubrica. Encontravam-se especialistas na teoria dos invariantes em muitas das grandes universidades, no fim do século passado, enquanto a maior parte dos matemáticos contemporâneos sentem dificuldade em nomear um praticante dessa teoria. De alguma forma, no decurso de meio século, algo que constituía um ramo ativo e importante da matemática perdeu-se no reordenamento social e intelectual da disciplina.

Tratar a teoria dos invariantes como uma categoria social apresenta várias conseqüências [II]. (1) Diferentes grupos de matemáticos concebem distintamente a essência da teoria dos invariantes. (2) Diferentes grupos de matemáticos atribuem valores distintos, no seio de sua *Weltanschauung* matemática, à teoria dos invariantes. (3) Essas classificações e valorações evoluem ao longo do tempo. O destino de uma teoria, olhada como categoria social, é determinada pelas ações daqueles que a convertem em teoria. Assim, o que ocorre à teoria dos invariantes depende de como a percebem e de como a tratam aqueles que a percebem.

Há duas classes distintas de matemáticos que colaboram na determinação do destino da categoria 'a teoria dos invariantes' e as suas atividades correlatas conduzirão a uma descrição do declínio da teoria. A primeira classe consiste nos especialistas cujos nomes estão associados à teoria. Esse teóricos dos invariantes despendem grande parte de seu tempo em cultivar a teoria. Para eles, essa teoria é um tradição viva e vigorosa. Se decrescer o número dos teóricos dos invariantes e minuar sua habilidade em atrair atenção, então a teoria dos invariantes terá existência social somente até quando for percebida e caracterizada pelos membros da segunda classe, os matemáticos que não são teóricos dos invariantes. Então, a teoria dos invariantes desaparece, quando lhe faltam especialistas e quando o resto da comunidade matemática não a figura como parte formativa da matemática.

Em um futuro ensaio, tratarei precipuamente do quesito da tradição findante da teoria dos invariantes. Investigarei cadeias de mestres e discípulos desde o período vital da teoria até a fase na qual restam poucos teóricos dos invariantes. Mostrarei que a penúltima geração dos teóricos dos invariantes estava situada de tal modo que inibiu a ulterior transmissão da teoria. Já no presente ensaio, pretendo tratar do problema do desaparecimento da teoria nos termos em que ela foi caracterizada pelos seus teóricos e pelos demais, relativamente ao desenvolvimento e à evolução de suas especialidades. Para fazer isso, é necessário assinalar certas propriedades das histórias coletivas ou histórias de grupos.

Os membros da maioria das atividades coletivas não se preocupam em desvelar e em preservar a história de seus cometimentos. Em graus variados, físicos, matemáticos, médicos, historiadores, juristas e teólogos atentam ao passado de suas tradições individuais. Em ordem crescente, preocupam-se com seu passado, porque o que se vê como passado tem implicações em suas atividades presentes. Um teólogo pode estar muito preocupado na elaboração de doutrina eclesiástica durante os últimos quinhentos anos. Para um físico, por outro lado, um conhecimento do que constituía a física do século XVIII não apresenta utilidade e, embora reconheça a importância do desenvolvimento da teoria dos *quanta* na década de 1920, ele não envidará esforços para lhes desvendar as minúcias da evolução histórica.

Como assinalou THOMAS S. KUHN, em seu livro *The Structure of Scientific Revolution*, na consolidação de revoluções nas ciências físicas, é incorporada nos textos escolares uma versão da história da disciplina escrita do ponto de vista da teoria recentemente vitoriosa. Essa nova perspectiva histórica olha a velha teoria nos termos da nova; e, ao promulgar novas regras, orienta as futuras gerações de cientistas à elaboração da nova teoria. Podemos dizer que outro tanto se aplique à matemática. Porém a matemática é uma disciplina consideravelmente mais multiforme que a física. Suas subdivisões são múltiplas e, em razão do número de especialidades distintas, os participantes têm uma percepção menor do que constituía os problemas criticamente importantes de uma era. Em matemática (assim como na maior parte das ciências especiais e em profissões como a medicina), podemos dar um passo além da formulação de KUHN e olhar não apenas como, após revoluções substantivas, surgem novas caracterizações do passado mas também como se desenvolvem novas caracterizações da história da disciplina no interior das elaborações das ideologias das muitas especialidades, novas e mutantes.

Nosso exame das múltiplas caracterizações da "teoria dos invariantes" revelará diversas histórias desse domínio contadas pelos próprios teóricos dos invariantes e por praticantes de especialidades contíguas. Ver-se-á a morte da teoria ou, antes, sua rejeição à não existência, decorrente de uma combinação de (a) a conclusão da história "pura" da teoria dos invariantes produzida pelos teóricos dos invariantes e (b) a exclusão da personagem das histórias das especialidades que se poderiam considerar suas herdeiras.

Acrescer-se-ão dois outros apontamentos. Um primeiro é que, com o correr do tempo, certos eventos passam a apresentar *status* simbólico. Um pronunciamento que, quando foi feito, não teve importância torna-se, anos depois, a caracterização do que realmente aconteceu. Os matemáticos datam a morte da teoria dos invariantes de declarações por HILBERT de que essa teoria tinha atingido sua meta, embora, quando essas sentenças foram proferidas, ninguém lhes tenha dado maior atenção. E não é

evidente, de modo algum, que essas sentenças hajam caracterizado corretamente o estado das coisas. O segundo apontamento enfoca o quesito do que se considera como essencialmente matemático. Aqui entra em jogo a distinção entre cálculo ou computação e existência abstrata [III]. Grupos distintos de matemáticos, que apreciam um desses modos de procedimento, tendem a apequenar os grupos que fazem uso copioso do método oposto. No caso presente, os sucessores dos teóricos dos invariantes elevaram de tal forma seus procedimentos abstratos que explicam naturalmente a morte da teoria dos invariantes pelo fato de o antigo tratamento, que privilegiava o cálculo, haver sido substituído pelo novo, de caráter abstrato. Portanto, o primeiro resultado realmente importante das técnicas abstratas no campo da teoria dos invariantes é considerado não apenas como a causa da morte da teoria dos invariantes mas também como o momento decisivo no modo de se praticar a matemática. Esse é um exemplo de como as ideologias de uma especialidade se tornam, para seus membros, fundamentos da explicação da ocorrência de certos fatos.

Os juízos aqui expostos são afins às idéias de vários eruditos. Como foi referido, é usada a concepção de KUHN de reescrever as histórias científicas. Minha apresentação difere um pouco da de KUHN, por nela se considerar a reconstrução histórica como um traço comum da vida coletiva, assumindo uma forma especial nas comunidades científicas. Similarmente, estou tratando das divisões gerais de uma disciplina e de seus argumentos substantivos, de sorte que não me estou preocupando particularmente com um novo sistema de explicações teóricas que substituam um antigo. Outros têm considerado reconstruções comunais da história. E. C. HUGHES fala das novas nações que criam para si um nobre passado (1). E R. BUCHER descreveu as diferentes histórias criadas por membros de várias especialidades médicas (2).

As idéias gerais de tempo e história usadas neste ensaio podem encontrar-se em *The Philosophy of the Present*, de G. H. MEAD. A noção de uma gramática, devida a L. WITTGENSTEIN, que aparece em suas *Philosophical Investigations* está implícita em diversos lugares. Também entram em jogo a idéia do uso simbólico do tempo, devida a A. L. STRAUSS e a noção de antecessores e sucessores, devida a A. SCHUTZ (3). Exploram-se, de modo geral, as idéias da sociologia do conhecimento porém com a especificidade de que estou olhando preferentemente o desenvolvimento histórico de ideologias e não as suas raízes em classificações sociológicas dos tipos religião, classe e cultura.

Antes de iniciar a parte principal deste ensaio, devo indicar duas limitações. A primeira decorre de, assim como os matemáticos descritos, eu haver feito uma escolha, na vasta riqueza da matemática, dos temas que podem ser considerados parte da teoria dos invariantes. A fim de expor minhas idéias,

quase identifiquei um dos principais problemas da teoria com a própria teoria. Isso não distorce grandemente a cena, pois as diferenças relativas à teoria estão centradas principalmente nesse problema. Devemos ter em mente que, ao longo das margens desta narrativa, se encontram sentenças acerca de problemas matemáticos considerados inextricavelmente vinculados ao problema que discutirei. Se alguns desses outros problemas fossem examinados, também viriam à frente as estruturas que se tornariam patentes.

A segunda limitação resulta de ser exigida uma vida de estudo concentrado da matemática, para se apreciar a riqueza das técnicas e dos resultados da teoria dos invariantes. Os peritos na teoria enxergavam no interior da própria matemática um corpo consistente de saber regido pelo conteúdo desse mesmo saber. Para os matemáticos, existe uma lógica de conexões e de desenvolvimento implícita no interior dos próprios documentos matemáticos. Dificilmente essa lógica se torna explícita. Interrogado acerca de um dado trabalho, um matemático responde, por exemplo, que ele constitui um caso especial de um outro, em um contexto diferente, ou que ele mostra a impossibilidade de se encontrar uma classificação estrutural geral, procurada por muitos. Para um matemático, essas caracterizações se encontram no coração de seu mundo de relevâncias, porém raramente ele esclarece essas relevâncias em documentos preservados. A história oficial da matemática que permeia os artigos e os livros de pesquisa da disciplina não indica as relações entre as idéias matemáticas. Um matemático pode encontrar um artigo relacionado a sua especialidade e explicar a um circunstante como ele se enquadra na corrente principal de seu trabalho. O circunstante não seria capaz disso, a menos que fosse um perito, pois o artigo não apresenta indicações facilmente compreensíveis. As indicações são vistas apenas pelo matemático, que está imerso no mundo da especialidade.

A manipulação explícita de idéias matemáticas conduz, ao longo do tempo, a distintas interpretações dessas idéias. Em um contexto matemático francamente simples, I. LAKATOS mostrou como o tratamento de idéias matemáticas técnicas se transmuda nas mãos de diferentes matemáticos e como essas idéias adquirem significados distintos, embora os matemáticos pareçam estar conversando acerca do mesmo objeto (4). Em minha discussão da teoria dos invariantes, não examinei esse aspecto de mudança, tanto pela dificuldade de tal tratamento quanto por poder ilustrar as mudanças nas caracterizações mais gerais da teoria sem recorrer às elaborações tecnicamente exatas da matemática pertinente (para o que, sem um prolongado estudo, não tenho a adequada competência, cabe notar). Portanto, a exposição seguinte basear-se-á em afirmativas dos matemáticos relativas à teoria dos invariantes e na descrição superficial do conteúdo dessa teoria.

II. Uma breve história da teoria dos invariantes até 1893.

Em 1891, apareceu uma história, de duas centenas de páginas, do desenvolvimento da teoria dos invariantes. Para celebrar o quinquagésimo aniversário dessa disciplina, a União dos Matemáticos Alemães pediu a um de seus membros eminentes, F. W. MEYER que lhe compusesse uma história (5). MEYER data o início da teoria dos invariantes de um artigo de GEORGE BOOLE, publicado em 1841. Por haver exposto a evolução da teoria às expensas das contribuições ela deu à matemática, MEYER descreveu a ampla trajetória que a teoria percorreu através da matemática do século XIX. Entre os matemáticos que contribuíram para a teoria dos invariantes encontram-se alguns dos maiores do período: BOOLE, CAYLEY, SYLVESTER, HESSE, EISENSTEIN, CLEBSCH, GORDAN, LINDEMANN, HERMITE, BRIOSCHI, PEANO, KLEIN, LIE, HILBERT, WEBER e outros [IV]. Algumas dessas personagens deram contribuições casuais à teoria, enquanto outras devotaram grande parte de suas vidas para desenvolvê-la. Residiam em cinco nações distintas (Inglaterra, Alemanha, França, Itália e os Estados Unidos) e, coletivamente, publicaram milhares de artigos em matemática.

Um esboço do desenvolvimento do que MEYER denomina problemas principais da teoria dos invariantes pode ser o seguinte. Em 1843, ARTHUR CAYLEY tomou uma idéia de um artigo, de 1841, de George Boole e começou a calcular os invariantes de funções homogêneas de ordem n . Três anos depois, CAYLEY submeteu uma revisão desse artigo ao *Crelle's Journal*, um periódico matemático do continente europeu. Em seu ensaio, CAYLEY propôs-se "encontrar todas as funções associadas a um qualquer número de funções que gozam da propriedade de preservar sua forma sob qualquer transformação linear das variáveis" (6) (isto é, encontrar os invariantes). Ele também procurou determinar os invariantes independentes e as relações entre eles. Após muitos anos, CAYLEY notou que essa tinha sido a primeira formulação do problema geral de invariantes (7).

Em 1856, na segunda de suas dez "Memórias sobre Quânticas" (*quântica* foi o nome atribuído às funções consideradas), CAYLEY resolveu o problema no caso de duas variáveis. Mostrou que, para quânticas de duas variáveis, abaixo de um certo grau, existe apenas um número finito de invariantes independentes e, acima desse grau, existe um número infinito delas [V].

CAYLEY não estava só em suas investigações. Entre os colaboradores encontravam-se seus conterrâneos J. J. SYLVESTER, um matemático erradio, ardoroso e prolífico, e o Rev. GEORGE SALMON. SYLVESTER enxergava na teoria dos invariantes a essência da "álgebra moderna". Uma dentre suas muitas sentenças entusiásticas era: "Assim como todos os caminhos levam a Roma, também assim pelos menos no meu próprio caso, todas as investigações algébricas, mais cedo ou mais tarde, terminam no

Capit6lio da  lgebra Moderna em cujo portal resplandescente está inscrita a teoria dos invariantes." (8) Antes dessa afirmação, o Rev. SALMON escrevera um texto sobre a teoria dos invariantes, *Modern Higher Algebra*, publicada em 1859. O texto foi traduzido ao alemão em 1863 e, quase simultaneamente, ao francês e ao italiano. Incorporava muito dos trabalhos de CAYLEY e SYLVESTER [VI].

Entrementes, na Alemanha, diversos matemáticos foram comovidos pelo trabalho de CAYLEY. Dois alemães, ARONHOLD e CLEBSCH, desenvolveram técnicas simbólicas para gerar e manipular invariantes de quânticas. O trabalho de ambos a esse respeito   altamente algébrico, isto é, seus problemas envolviam a manipulação algébrica de símbolos, embora o interesse de CLEBSCH residisse no significado geométrico das manipulações. Por volta de 1860, CLEBSCH iniciou seu discípulo PAUL GORDAN na teoria dos invariantes (9). Em acordo com CLEBSCH, GORDAN obteve muitos resultados na teoria. Após vários anos de trabalho na teoria, GORDAN provou um teorema que guardaria seu nome – o teorema da finitude de GORDAN. Em seu ensaio de 1868, GORDAN mostrou que CAYLEY cometera um engano em sua "Segunda Memória sobre Quânticas". GORDAN provou que, para quânticas de duas variáveis e de qualquer grau existe somente um número finito de invariantes independentes (isto é, uma base finita de invariantes). Sua prova consistia em criar um método para, em qualquer caso, calcular os invariantes independentes. Foram usadas as técnicas de ARONHOLD e CLEBSCH de representação simbólica dos invariantes.

Depois que GORDAN provou seu teorema, foram publicados diversos textos sobre a teoria dos invariantes. Em 1872, surgiu um texto de CLEBSCH sobre a teoria das quânticas em duas variáveis (10). Na introdução, declara ser seu desejo apresentar as técnicas desenvolvidas desde a publicação do texto de SALMON e divulgar a prova da finitude de GORDAN, a qual propiciou uma nova classe de investigações mais profundas e mais importantes. O livro restringe-se   discussão do caso no qual há apenas duas variáveis, pois a teoriade mais variáveis ainda não fora bem desenvolvida.

Em seqüência a sua prova de finitude de 1868, GORDAN tentou dominar o problema para quânticas de mais de duas variáveis. Era capaz de mostrar a finitude para diversos casos especiais e, na tentativa de resolver o problema geral da finitude, desenvolveu muitas técnicas específicas. Em 1885 e 1887, apareceu um livro baseado no trabalho de GORDAN (11). Na introdução ao primeiro volume, o editor afirma que o texto se baseia no trabalho de CLEBSCH. Seu principal interesse é o problema da finitude. O editor pretende que a teoria dos invariantes então "conduza   expressão das leis formais puras da  lgebra" (12). No segundo volume, o leitor   advertido da dificuldade da matemática. O tema por ser tratado são as

quânticas em duas variáveis. O terceiro volume, jamais publicado, destinar-se-ia a tratar o caso de três variáveis. Por suas contribuições e sua dedicação, GORDAN era conhecido como o Rei dos Invariantes.

Durante os anos seguintes à prova de GORDAN, cresceu o número de matemáticos que passou a interessar-se pela teoria dos invariantes. CAYLEY, SYLVESTER e outros na Inglaterra trabalharam em questões da teoria, prestando atenção particular ao cálculo de invariantes em casos especiais. Usavam suas próprias ferramentas e não dependiam das técnicas altamente desenvolvidas que eram populares no continente europeu (13). Na Alemanha, GORDAN e outros laboravam no problema sugerido pelo teorema de GORDAN, isto é, em estabelecer a finitude para invariantes de quânticas de mais de duas variáveis. Finalmente, em 1888, depois de uma visita a GORDAN, DAVID HILBERT, na idade de vinte e seis anos, usando idéias de outra parte da álgebra, provou a existência de um sistema finito de invariantes independentes, para quânticas de qualquer número de variáveis. HILBERT não exibiu um procedimento para encontrar os sistemas. Ele mostrou abstratamente sua existência. Conta-se que, ao ver a prova de HILBERT, GORDAN teria dito: "Isso não é matemática, é teologia." (14)

Um matemático americano, H. S. WHITE, encarando os fatos de uma perspectiva de 1899, refere que GORDAN trabalhou em casos especiais, após a prova de seu teorema, em 1868. WHITE narra que, até 1887, os métodos de GORDAN pareciam ser os únicos aplicáveis ao problema e que "a extensão do teorema de GORDAN a formas [quânticas] em mais de duas variáveis não fora obtida nos vinte anos durante os quais fora ansiosamente esperada como uma possibilidade iminente". Em 1888, "foi uma surpresa agradável saber que as provas elaboradas do teorema de GORDAN, até então correntes, poderiam ser substituídas por uma prova que apenas ocupava quatro páginas *in-quarto*. ... Certamente, ninguém estava preparado para o anúncio, feito em dezembro de 1888, de que o teorema poderia ser provado, por um método uniforme, para formas [quânticas] em qualquer número de variáveis. Não surpreende que alguns eruditos tenham abanado negativamente as cabeças, com dúvida acerca das generalizações impetuosas do jovem entusiástico Dr. HILBERT de Königsberg. Finalmente, os mais incrédulos foram obrigados a concordar em que ele tinha exemplificado a máxima: Generalize seu problema e resolva-o." (15) [VII]

De 1888 a 1893, HILBERT fez diversas outras contribuições à teoria dos invariantes. Em um artigo de 1893, delineando suas contribuições à teoria, HILBERT apontou que existem três fases no desenvolvimento de uma teoria matemática (16). São a ingênua, a formal e a crítica. Para HILBERT, aqueles que, anteriormente, deram contribuições à teoria dos invariantes pertenciam às duas primeiras fases de desenvolvimento, enquanto apenas ele

pertencia à última. No mesmo ano, em um ensaio no qual resolvia uma variação do problema da finitude, HILBERT terminou o trabalho com a sentença; "Com isso, creio, foram atingidas as metas gerais mais importantes da teoria dos campos de funcionais de invariantes (17). Por essa época, HILBERT escreveu a seu amigo HERMANN MINKOWSKI, revelando que já não trabalharia na teoria dos invariantes; já havia começado a estudar outras coisas (18). Tanto privada quanto publicamente, HILBERT exprimia o deslocamento de seu interesse. Anteriormente a esses pronunciamentos de HILBERT, ninguém exprimira, publicamente, a opinião de que a teoria dos invariantes houvesse atingido a fase final de seu desenvolvimento nem que suas metas importantes houvessem sido alcançadas.

Além disso, à época em que HILBERT fizera essas declarações, parece que ninguém tomara conhecimento delas. O único comentário que pude encontrar fora feito por MEYER, em uma resenha do primeiro ensaio de HILBERT, de 1893. HILBERT colocara CAYLEY e SYLVESTER na fase ingênua da teoria, QLEBSCH e GORDAN na fase formal e somente ele próprio na fase crítica. Em uma linguagem comedida, MEYER respondeu, que "o revisor não se afasta excessivamente do autor altamente dotado, se se entender que uma parte considerável dos métodos desenvolvidos por GORDAN, CAPELLI, STUDY, STROH, DERUYTS e outros se estendem para além da fase formal" (19).

III. Escalada até o presente

Procedemos agora à subida até o presente, desde a fase final das contribuições de HILBERT. Para a maioria dos matemáticos referidos nesta seção, o esboço histórico oferecido em II constitui parte de sua descrição do desenvolvimento da teoria dos invariantes. Para eles, a história da teoria até o teorema de HILBERT, avaliações à parte, é um tema fixado e bem conhecido. Examinaremos aqui como tais matemáticos construíram sobre esse tema e como podem ser vistos contrariar ou reforçar as pretensões implícitas nas atividades de HILBERT.

Retrocedamos um passo, por um momento, e olhemos o que, em 1886, era considerado matemática moderna. Falando à Real Academia Irlandesa, disse um matemático: "Parece que agora a teoria dos invariantes e os outros produtos da idéia matemática moderna são uma parte tão necessária do conhecimento matemático quanto os cálculos diferencial e integral."⁽²⁰⁾ Mais adiante, tomado de entusiasmo, quase identificou a matemática moderna com os invariantes. O interesse na teoria dos invariantes também se reflete na quantidade de artigos que foram classificados sob a rubrica, "Theorie der Formen"(formas e quânticas), no periódico de resumos, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* [anais do progresso da matemática], de 1887 a 1900 ^[VIII]:

1887	45	1892	47	1898	31
1888	68	1893-1894	50	1899	34
1889	46	1895	25	1900	34
1890	42	1896	30		
1891	40	1897	35		

A próxima pessoa a falar acerca do progresso da teoria foi o já referido comentador americano. Em um artigo de 1899, resenhou os eventos que conduziram à prova de HILBERT e olhou para o futuro. Além do problema da finitude, WHITE referiu dois outros problemas que haviam sido resolvidos na última década. Continuou ele: "E nesses três [problemas], certamente foi necessária uma quantidade imensa de labor para se dominar completamente o território ocupado."⁽²¹⁾ WHITE não rejeitou os teoremas de HILBERT; ele os acolheu e os tomou para indicar o que mais poderia ser feito na disciplina vertente. Há lições por aprender de HILBERT. Uma das provas de HILBERT "serve admiravelmente para ilustrar a afirmativa de que é chegada a hora de a teoria dos invariantes aderir firmemente aos mais modernos desenvolvimentos da álgebra." Como indicação do que então poderia ser feito, WHITE apontou o uso dos teoremas de HILBERT como auxílio para efetuar os cálculos que se mostraram tão difíceis aos pioneiros do campo.

Os proponentes da teoria dos invariantes pareciam olhar para a frente e, com a virada do século, faces distintas começaram a aparecer nas suas fileiras. A leitura atenta das resenhas na *Fortschritte* indica um deslocamento lingüístico. O número de artigos por alemães começa a decrescer e o número de artigos por ingleses e americanos cresce levemente. Na Inglaterra, são publicados diversos textos sobre os invariantes e, nos anos seguintes, apareceram nos periódicos muitos artigos sobre esse tema. O eminente matemático americano, L. E. DICKSON, escreve vinte e oito ensaios e dois livros, entre 1907 e 1915⁽²²⁾. Seu trabalho não desperta a atenção de europeus. Nos anos posteriores à virada do século, o censo de artigos resenhados na *Fortschritte* descreve uma trajetória irregular^[IX].

1901	31	1907	26	1913	30
1902	29	1908	33	1914-1915	74
1903	36	1909	27	1916-1918	30
1904	45	1910	28	1919-1920	19
1905	32	1911	32	1921-1922	20

A partir desse ponto, começaram a ocorrer diversas mudanças na teoria dos invariantes. Essas mudanças são correlatas à forma sob a qual a teoria é ordenada e à história das pessoas que operam essas mudanças na teoria.

A teoria dos invariantes e a ascensão da “álgebra moderna”.

Por volta de 1910, EMMY NOETHER tornou-se discípula de GORDAN. A dissertação escrita sob a tutela de GORDAN foi elaborada em um estilo muito próximo do espírito em que ele compôs seus trabalhos anteriores. O resultado por ela obtido foi uma extensão, ao caso de n variáveis, de um teorema de GORDAN sobre invariantes de duas e três variáveis. Ela concluiu sua tese com uma tabela de 331 formas escritas na notação simbólica ⁽²³⁾.

Em 1911, um ano após GORDAN aposentar-se, veio para Erlangen um outro teórico dos invariantes. Iniciou EMMY NOETHER ao teorema da finitude de HILBERT e, pelos próximos poucos anos, ela usou esse teorema. De 1911 a 1919, EMMY NOETHER produziu uma série de artigos que instituíam a finitude nos casos que não haviam sido considerados por HILBERT ^[X]. Em 1916, a pedido de HILBERT, EMMY NOETHER foi a Göttingen. HILBERT trabalhava nos aspectos matemáticos da teoria geral da relatividade. Por enveredar por problemas que exigiam conhecimento da teoria dos invariantes, convidou EMMY NOETHER a assessorá-lo. Durante seus quatro primeiros anos em Göttingen, NOETHER publicou diversos ensaios sobre a teoria da Relatividade. Após 1920, ela escreveu apenas um artigo sobre invariantes.

O trabalho que EMMY NOETHER elaborou nos anos posteriores a 1920 tornou-se parte, hoje em dia, do curso regular de graduação em matemática. É o ramo da matemática a que seu nome está imedia-tamente associado, sendo hoje considerado uma das pedras angulares da “álgebra moderna”. Sob a influência de HILBERT, ela procurou um sistema de axiomas abstratos dos quais obtivesse os fatos da álgebra. Seu resultado mais bem conhecido é uma teoria axiomática dos anéis. No interior dessa teoria, ela generalizou o teorema da finitude de HILBERT, de tal modo que ele não apresenta conexão alguma com invariantes ^[XI]. O teorema de HILBERT tornou-se um resultado não muito difícil, vazado na linguagem da “álgebra moderna” ^[XII]. A obra de NOETHER pode ser encarado, não tão propriamente como uma mudança na teoria dos invariantes, mas como a transposição para outro ramo da matemática de um resultado que, anteriormente, se pensou pertencer à teoria dos invariantes.

A teoria dos invariantes sob novas roupas

Em 1923, um teórico dos invariantes, R. WEITZENBÖCK, redigiu um texto, caracterizando-o como uma apresentação da teoria dos invariantes de um ponto de vista moderno ⁽²⁴⁾. Ao invés de considerar invariantes de quânticas, como fora feito antes, ele agora falava de invariantes de vetores e de tensores, os objetos da teoria da relatividade. WEITZENBÖCK não se preocupava com a geometria e a análise da teoria da relatividade. Ela desejava apresentar a teoria dos invariantes sob uma forma puramente algébrica e discutir os invariantes que surgiam dos diversos grupos de transformações. O texto de 1923 mudou radicalmente a aparência da teoria dos invariantes. Já não ocorrem listas de quânticas individuais em evidência superabundante. No lugar delas figura a notação simbólica "moderna" de vetores e tensores.

No mesmo ano, foi produzido um outro livro sobre a teoria dos invariantes ⁽²⁵⁾. E. STUDY, que há muito tempo embarcara nos invariantes (seu primeiro livro sobre esse tema fora publicado em 1887 ⁽²⁶⁾) também desejava instituir uma fundação nova e moderna para a teoria dos invariantes. Um pouco diferentemente de WEITZENBÖCK, STUDY se preocupava em preservar a produção do passado. Na introdução a seu livro, STUDY aproveita para criticar certas tendências modernas na matemática e para apontar o que ele considera serem os erros daqueles que estavam descurando a teoria dos invariantes ^[XIII]. STUDY usa métodos vetoriais em sua apresentação mas esclarece que pretende restaurar as idéias de ARONHOLD e CLEBSCH sobre as quais a teoria fora originalmente construída. STUDY percebe os autores contemporâneos de análise vetorial como ignorantes das idéias da teoria dos invariantes. A fim de corrigir essa situação, ele pretende trazer os invariantes para o centro da atenção e construir sobre eles. Seu juízo é de que os avanços da matemática se apóiam nas idéias do passado e que as pérolas da disciplina apenas emergem mediante labor paciente e reconhecimento dos resultados previamente importantes.

STUDY explica o fato, como ele o vê, de que haja pouco interesse pela teoria dos invariantes, atribuindo à nova geração um enfatuamento com os métodos abstratos e a falta de referência a problemas específicos. Ele pensa que a teoria dos invariantes esteja um pouco interdita por suas técnicas haverem sido apresentadas obscuramente; mas considera desencaminhada a nova geração, que acredita possa a matemática prosseguir sem computação. Segundo ele, isso conduz essa nova geração a desdenhar os invariantes. Para STUDY, a matemática deve consistir em uma combinação de cálculo e de generalização; é impossível praticar a matemática no interior do reino da generalização; não se encontra um atalho entre a generalidade amorfa e a plenitude dos fatos individuais; são necessárias fórmulas, pois elas espelham a estrutura da matemática. Além disso, STUDY exorta os matemáticos a se precaverem do anúncio de que alguém tenha

encontrado os principais fatos de uma teoria. Ele acredita ser obrigação de cada um apontar quanto mais se pode efetuar.

Nos anos posteriores aos comentários de STUDY, declinou o número de contribuições à teoria dos invariantes, de acordo com as resenhas na *Fortschritte* ^[XIV].

1924	21	1930	18	1936	16
1925	25	1031	9	1937	13
1926	17	1932	9	1938	7
1927	26	1933	9	1939	5
1928	28	1934	15	1940	5
1929	19	1935	5	1941	4

Somente em 1939 alguém voltou a falar da teoria. Entre as cinco contribuições resenhadas em 1940 estava um livro por HERMANN WEYL, que aparecera um ano antes. O livro, escrito por um dos mais famosos matemáticos vivos naquela época, circulou amplamente no âmbito do mundo matemático. Foi aclamado como um clássico entre os ensaios matemáticos e encontrou o seu lugar nas bibliotecas de muitos matemáticos. Na introdução ao livro, WEYL anuncia suas duas metas. A primeira é apresentar alguns resultados de sua teoria da representação de grupos ^[XV]. No contexto do primeiro, seu segundo desígnio é fornecer uma introdução moderna à teoria dos invariantes. Não pode ser postergado o rejuvenescimento da teoria clássica dos invariantes, que evoluiu para um estado de quase petrificação.”⁽²⁸⁾ WEYL continua, afirmando desejar preservar muito do passado. Em seu esboço do passado, WEYL distingue dois dos três períodos que HILBERT citara há quarenta e seis anos. O período formal do desenvolvimento da teoria dos invariantes abrange ARONHOLD, CLEBSCH e GORDAN, que elaboraram processos formais, a fim de calcularem invariantes específicos do grupo linear geral, enquanto o único ocupante do período crítico é HILBERT, que “resolve os principais problemas, aniquilando assim todo o tema”. A teoria dos invariantes não morre – “sua vida persiste, ainda que trêmula, durante as próximas décadas” ⁽²⁹⁾.

Para WEYL, houve duas contribuições importantes dadas após a obra de HILBERT. Um matemático alemão, em 1897, usou processos não algébricos para gerar invariantes para o grupo ortogonal e para provar um teorema de finitude para esses invariantes. E, na Inglaterra, trabalhando só e ignorado, um matemático aplicou seu trabalho sobre grupos simétricos à teoria dos invariantes. WEYL pode, agora, apresentar a teoria dos Invariante sob uma forma moderna, porque seu próprio trabalho e a obra de outros sobre a representação de grupos conduziram ao

estado no qual são disponíveis técnicas que permitem considerar os invariantes sob uma nova forma ^[XVI].

Um revisor do livro de WEYL observa a omissão da teoria dos invariantes e continua, "... é uma realização importante e original efetuada aqui pelo Prof. Weyl, ao vincular a teoria dos invariantes com a corrente principal da álgebra e ao mostrar que a disciplina tem tanto um futuro quanto um passado notável" ⁽³⁰⁾. E, após uma década da publicação do livro, WEYL rememorou a evolução da matemática durante a primeira metade do século XX. Em sua revisão, WEYL enxerga a teoria dos invariantes como um ramo da teoria da representação de grupos ⁽³¹⁾.

A teoria dos invariantes hoje em dia

A despeito da predição otimista do revisor, um exame dos resumos matemáticos durante o quarto de século consecutivo à publicação do livro de WEYL revelará que, anualmente, apenas alguns apareceram sob a rubrica de teoria dos invariantes e que, por muitos anos, a rubrica não foi listada ⁽³²⁾.

Para muitos matemáticos, a teoria dos invariantes é uma disciplina morta. Em entrevistas e conversas, atribuem o desaparecimento da teoria dos invariantes a motivos tais quais HILBERT haver resolvido os seus principais problemas, o campo se haver tornado excessivamente repetitivo ou os problemas da teoria dos invariantes se terem tornado desinteressantes por lidarem com exemplos específicos e não com propriedades estruturais gerais ⁽³³⁾. Para esses matemáticos, a teoria dos invariantes é uma disciplina remota, associada ao anos anteriores à Primeira Guerra Mundial. Embora admitam espontaneamente a importância do conceito de *invariância* em matemática, sentem que os problemas discutidos pela teoria dos invariantes são muito específicos para despertarem presentemente muito interesse.

Os sentimentos contemporâneos para com a teoria dos invariantes são bem ilustrados na experiência de um jovem Ph. D. que desejou efetuar alguns cálculos envolvendo quânticas ⁽³⁴⁾. Não teve dificuldades em verificar que essas formas eram o principal apoio do que outrora fora a teoria dos invariantes. Porém, ao indagar a seus professores onde poderia obter informação acerca dessas quânticas, não obtinha resposta útil. Os algebristas que consultara olhavam-no horripilados, como se quisessem dizer que houvesse alguma coisa errada em querer saber acerca da teoria dos invariantes. As respostas obtidas indicavam que, para os algebristas contemporâneos, a teoria dos invariantes era o paradigma de teorias vetustas, mortas e computacionais ^[XVII].

Embora o jovem doutor não o houvesse descoberto, há duas classes de matemáticos que sustentam estarem trabalhando em

problemas que eles reputam originados da teoria dos invariantes. Em uma entrevista conduzida em 1965, um matemático de uma das classes expôs sua visão da conexão entre os problemas que o ocupavam e o que supunha tenha sido a teoria dos invariantes⁽³⁵⁾. Olhando o passado, ele afirmou que a teoria antiga era manipulativa e envolvia uma computação horrenda. HILBERT pôs fim a tudo isso, embora algumas pessoas continuassem a fazer cálculos. Ulteriormente, foi esquecido esse modo de investigação; esses matemáticos trabalhavam sem pensar; não havia matemática em seu trabalho. Ao resumir o desenvolvimento da disciplina desde HILBERT, esse matemático cita o livro de WEITZENBÖCK como fonte de computação específica que o matemático usa em seu próprio trabalho mas que não publica. Considera o livro de WEYL como a exposição canônica da teoria clássica dos invariantes: é um livro encantador porém difícil de ser lido, por causa do estilo impreciso do autor (isto é, o material é apresentado coloquialmente e não no estilo usual em artigos de pesquisa, com enunciados e provas de teoremas); poucas pessoas sofreram a influência da exposição da teoria dos invariantes por WEYL mas o livro é conhecido sobretudo por seus resultados na teoria da representação de grupos.

Após dezoito anos do livro de WEYL, revivesceu o interesse pelo tema. Parafraseando nosso matemático: quando começaram a estudar grupos algébricos, verificaram que poderiam manipular alguns dos problemas antigos; os precursores simplesmente não enunciaram corretamente os problemas; no contexto adequado, esses problemas poderiam ser generalizados; presentemente, o problema se revestiu como um espaço quociente de variedades^[XVIII]; já ninguém efetua cálculos; o tema é inserido no contexto da geometria algébrica e não é chamado teoria dos invariantes mas por seu nome técnico, o problema do espaço quociente para grupos algébricos ou para grupos de transformação; existe apenas cerca de meia dúzia de pessoas trabalhando nesse problema.

O matemático disse que a principal meta da investigação contemporânea era resolver o problema do espaço quociente mas que, associada a isso, havia a generalização do teorema da finitude de HILBERT. Respondendo a uma pergunta, o matemático ligou as técnicas de seu trabalho ao matemáticos franceses contemporâneos que não se interessavam absolutamente pela teoria dos invariantes.

A segunda classe de pessoas que tomam algumas das idéias da teoria dos invariantes trabalha em um ramo fronteiriço da matemática. Industriados como matemáticos, físicos ou engenheiros, concentram-se na mecânica do contínuo – isto é, o comportamento mecânico de fluidos e de sólidos sob condições diversas de tensão. São empregados em departamentos de matemática, de matemática aplicada, de mecânica e de engenharia e publicam ensaios tanto em suas próprias revistas específicas quanto nos periódicos dos ramos reconhecidos da física e da

matemática. A classe é representada por meia dúzia de expoentes (37).

Seu uso da teoria dos invariantes é informalmente caracterizado por um de seus eminentes membros: "Iniciada com o redescobrimento descuidado, em 1945, de um caso especial de um teorema demonstrado por WEITZENBÖCK, a teoria dos invariantes revivesceu no contexto da moderna mecânica do contínuo. Nos últimos anos, publicaram-se, pelo menos, vinte artigos a respeito dela, sobretudo no *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Tem sido conferida ênfase à exibição de sistemas de invariantes. Usou-se muito pouco da antiga teoria dos invariantes. Os autores que trabalham nesse ramo notaram que os métodos antigos eram inadequadamente elaborados para os objetivos desejados, de sorte que começaram de novo."⁽³⁸⁾

As pessoas que trabalham na mecânica do contínuo não se interessam precipuamente por resultados da teoria dos invariantes. Recorrem à teoria apenas enquanto lhes é útil no tratamento de relações importantes à mecânica do contínuo. Já que os problemas com os quais lidam exigem conhecimento das propriedades explícitas de sistemas de invariantes, algumas dessas pessoas aprenderam as técnicas da teoria clássica dos invariantes. Leram tanto WEYL quanto WEITZENBÖCK e, eventualmente, voltaram ao trabalho dos teóricos dos invariantes do século XIX e do início do século XX. De modo geral, a tendência é evitar, sempre que for possível, as técnicas da teoria dos invariantes. "... a notação especializada da teoria clássica dos invariantes torna desejável que os resultados sejam obtidos de tal modo que a torne acessível a um número significativo de praticantes da matemática aplicada."⁽³⁹⁾ Contudo, os ensaios de alguns desses mecânicos trazem uma semelhança notável com os dos teóricos clássicos dos invariantes, por conterem muitas páginas que exibem bases de invariantes de quânticas específicas (ou, nesse caso, de tensores) ^[XIX].

Em virtude de a mecânica do contínuo lidar com problemas que a maioria dos matemáticos considera pertencentes ou à engenharia ou à física clássica, o trabalho que descrevemos não é bem conhecido. Embora reivindicam agressivamente que sua especialidade seja considerada com maior seriedade como um ramo fecundo da matemática pura, até agora esses mecânicos nem atraíram a atenção de outros matemáticos nem obtiveram emprego em muitos departamentos de matemática; tampouco aumentaram significativamente o seu número. Conseqüentemente, essas partes da teoria dos invariantes por eles redescobertas e usadas não são pecebidas pelo resto da comunidade matemática ^[XX].

IV. Diversas histórias

A história da teoria dos invariantes resumida na seção II e preservada no *Report* de MEYER é aceita uniformemente por

matemáticos que, de algum modo, se interessam pelo desenvolvimento do ramo. A história da teoria dos invariantes, desde o descobrimento dos invariantes por BOOLE até a portentosa solução do problema da finitude por HILBERT, constitui uma disciplina fechada. Embora estejam fixados os eventos que conduziram à solução de HILBERT, os acontecimentos posteriores ao teorema da base finita estão sujeitos a interpretação e a valoração distintas. No relato até agora apresentado, podemos encontrar as sementes de cinco histórias do desenvolvimento posterior da teoria dos invariantes, consoante as distintas classes de matemáticos.

1) Para iniciar, consideremos a história “pura” da teoria vista por um especialista. Os teóricos dos invariantes traçam uma reta, passando por CAYLEY, GORDAN e HILBERT, que vai de BOOLE até o trabalho que estão conduzindo. Percebem a teoria crescendo, às vezes por saltos, às vezes mais lentamente. Com cada nova contribuição, a teoria se amplia, esperando que mais seja feito. A solução de cada problema constitui a matéria do próximo. Outras teorias podem trazer contribuições importantes à teoria dos invariantes mas essas contribuições, ao invés de reduzirem a teoria, a fazem crescer. A teoria dos invariantes é concebida como uma atividade matemática bem instituída, com técnicas altamente refinadas, que pode ser amplificada em muitos lugares distintos. Para eles, além disso, os invariantes estão profundamente engastados no progresso da matemática. A teoria assimila novas idéias e oferece à comunidade matemática idéias interessantes em si mesmas e que, sendo cultivadas, podem apresentar um amplo leque de aplicações.

Uma apreciação eclética por teóricos dos invariantes, a exemplo do comentador irlandês, colocaria a teoria dos invariantes como o centro do interesse matemático; a exemplo do comentador americano, veria o teorema de HILBERT como fonte de novas ferramentas por serem aplicadas a problemas eminentes da teoria; e, a exemplo de STUDY, enxergaria a teoria dos invariantes envolvida na linguagem da análise vetorial, conduzindo suas técnicas bem comprovadas a uma compreensão mais profunda da álgebra e de suas conexões com a geometria. Essa, certamente, é uma descrição idealizada mas ela representa os teóricos dos invariantes ao olharem de sua posição para o resto da matemática, encarando outras atividades como contribuintes à teoria dos invariantes e essa teoria conservando-se como uma entidade em si mesma. Essa perspectiva virtualmente desapareceu após 1930.

2) Por volta de 1925 em diante, EMMY NOETHER foi vista como um dos heróis da álgebra abstrata. Foi colocada na linhagem de DEDEKIND, KRONECKER (ambos gigantes do século XIX) e HILBERT. Juntamente com dois contemporâneos (ARTIN e VAN DER WAERDEN), NOETHER é considerada uma fundadora do que é apresentado como álgebra moderna a todo estudante de graduação em matemática [XXI]. A versão por NOETHER do teorema da finitude de HILBERT, situada no

contexto da teoria dos anéis por ela construída, é considerada um dos resultados básicos da teoria. Embora tanto o seu trabalho quanto o de HILBERT surgissem em conexão com a teoria dos invariantes, não foram considerados, pelo algebristas "modernos" como engastados naquela teoria. É necessário sermos cuidadosos nesse ponto, pois os resultados de HILBERT foram caracterizados pelos teóricos dos invariantes de 1895 como aplicações dos resultados da teoria dos módulos de KRONECKER à teoria dos invariantes. Isto é, os contemporâneos dos teoremas de HILBERT consideram que ele trouxe resultados de outro campo da álgebra para a teoria dos invariantes (isto é, HILBERT pinçou técnicas e incorporou-as ao redil dos invariantes). Exatamente oposto é o ponto de vista dos algebristas "modernos" que assimilaram a tradição decorrente de HILBERT. Enxergam a HILBERT, na estirpe de KRONECKER e DEDEKIND, ajudando a expor uma nova visão da álgebra.

Em uma resenha, de 1933, da obra algébrica de HILBERT, B. L. VAN DER WAERDEN escreve: "Dos trabalhos algébricos de HILBERT, os artigos de 1888 e 1893 (nos quais, respectivamente, resolve o problema da finitude e declara alcançada a meta da teoria dos invariantes) tiveram uma influência irresistivelmente transformadora no pensamento algébrico. Embora esses ensaios constituam a conclusão das investigações de HILBERT acerca da teoria dos invariantes, no que diz respeito ao método e à relevância, eles se estendem muito além do reino da teoria dos invariantes. (Seu ponto de partida está na obra de DEDEKIND e de KRONECKER.) Quando, nesses ensaios, HILBERT considera o campo dos invariantes como casos especiais do campo das funções, ele se coloca no momento decisivo de um desenvolvimento histórico: antes dele, os algebristas interessavam-se, sobretudo, pela possibilidade de se exibirem explicitamente todos os invariantes de uma forma fundamental (uma quântica); depois dele, os algebristas examinaram mais as propriedades gerais aritméticas e algébricas dos sistemas de funções racionais e algébricas. Fora desse círculo de pensamento, desenvolveram-se as teorias gerais de corpos, anéis e módulos abstratos (isto é, a álgebra 'moderna')." ⁽⁴⁴⁾

Assim, antes que transcorressem três anos da inauguração da álgebra "moderna" (isto é, da publicação da *Moderne Algebra*), HILBERT é entronado firmemente como um de seus progenitores. Outrossim, em virtude dos ensaios e das preleções sobre a teoria axiomática de anéis dadas em Göttingen, EMMY NOETHER se encontra entre os heróis dessa disciplina. Um expositor da nova álgebra na América delinea a sua história: "Historicamente, diversas idéias fundamentais podem ser rastreadas até a obra de Dedekind, a de Kronecker e a de Lasker, porém as contribuições principais à teoria foram feitas, nos dez últimos anos, por E. Noether, Krull, van der Waerden e outros." ⁽⁴⁵⁾

Por outro lado, a teoria dos invariantes de que HILBERT e NOETHER (e, na juventude, VAN DER WAERDEN) se ocuparam não é considerada parte da álgebra "moderna" nem é vista como fonte da

álgebra "moderna" pelos cronistas menos informados que VAN DER WAERDEN. Em seu texto, VAN DER WAERDEN não lida com a teoria dos invariantes, por ser muito periférica. Os primeiros expositores da álgebra "moderna" não lhe fazem a mínima referência em seus esboços do desenvolvimento da disciplina.

Além disso, na resenha por VAN DER WAERDEN podemos detectar uma razão da queda de interesse pela teoria dos invariantes: para os algebristas modernos, HILBERT modificou a orientação sobre quais problemas são considerados matematicamente interessantes; antes dele, a teoria dos invariantes tratava de encontrar invariantes específicos; depois dele, os matemáticos voltaram-se para problemas mais gerais; procuram, agora, as propriedades algébricas dos sistemas; essa mudança conduziu à obsolescência da teoria dos invariantes e ao desenvolvimento da álgebra "moderna"; a teoria dos invariantes, praticada no espírito de GORDAN, lidava com problemas restritos de um modo que não conduzia à solução; HILBERT erradicou anos de computação improfícua pela aplicação de técnicas abstratas e, através disso, lançou os fundamentos da álgebra moderna.

3) WEYL seguiu o curso da história da teoria até HILBERT e aos sucessores desse que consideraram o problema da finitude na perspectiva de grupos e de técnicas que, posteriormente, puderam ser associadas à teoria da representação de grupos. Embora WEYL houvesse incorporado a seu livro muitas técnicas pré-hilbertianas da teoria dos invariantes, os autores importantes que colhem em WEYL parecem extirpar inteiramente esse material. Estão interessados apenas no que ele tem a dizer acerca da representação de grupos. Assim, como disse WEYL, a teoria dos invariantes foi subordinada à teoria da representação de grupos. Para seus sucessores, contudo, os invariantes foram tragados pela teoria da representação de grupos.

4) A primeira classe da geração contemporânea de investigadores consiste apenas em herdeiros da teoria dos invariantes. Pinçaram os problemas de invariantes e incorporaram-nos ao recanto de uma vasta teoria moderna. Sua história constrói-se sobre a de WEYL. Para eles, WEYL representa a exposição última e clássica da teoria dos invariantes. Com WEYL acabou efetivamente essa tradição. As investigações em curso provêm dos resultados da matemática francesa moderna e, por causa da conexão delas com uns poucos problemas periféricos, só um punhado de matemáticos se interessa por elas. O nome desse ramo de problemas não é teoria dos invariantes, pois apenas casualmente foi motivada por ela e, por casualidade, inclui problemas dessa teoria.

5) A segunda classe da geração contemporânea, a qual trabalha nas fímbrias da comunidade matemática, não parece participar da imagem da morte da teoria dos invariantes divisada pelos algebristas modernos. Trabalham em problemas similares, em espírito, aos de GORDAN. Para eles, a teoria dos invariantes é um

ramo respeitável da matemática e, ainda que faça uso de técnicas complicadas, sendo modificada para aplicações, pode ser usada para resolver os problemas da mecânica do contínuo. Sentem que os matemáticos devam prestar maior atenção ao seu trabalho, por ser parte da matemática. Quanto a mecânica se tornar mais interessante para os matemáticos, também presumivelmente se tornarão mais interessantes as novas aplicações da teoria dos invariantes.

V. Conclusão

Na introdução, sugeri que, se encarássemos a teoria dos invariantes como uma categoria social, poderíamos explicar o seu desaparecimento nos termos dos modos segundo os quais diversos grupos de matemáticos a contemplam como parte da matemática. Em seguida, apresentei a narrativa da história da teoria dos invariantes que descreve unificadamente a disciplina até a solução, por HILBERT, em 1888-1893, de um de seus problemas centrais. O que os matemáticos viram acontecer após 1893 dependeu da perspectiva na qual olharam a teoria. Na última seção, revimos algumas histórias da fase recente da teoria dos invariantes. Às expensas delas, pudemos construir uma descrição da morte da teoria dos invariantes, lembrando-nos de que, como categoria social, seu destino está determinado pelo destino e pelas ações daqueles que a percebiam.

Apoiados nas quatro histórias, podemos descrever o desaparecimento da teoria dos invariantes nos termos seguintes:

1) Como uma tradição, a teoria dos invariantes morreu. Os especialistas que se identificavam com a teoria não foram capazes de chamar a atenção para ela e de aliciar matemáticos criativos, comprometidos a trabalhar nela. Por causa disso, a história “pura” da teoria dos invariantes, como um campo prospectivo e aberto, desapareceu.

2) Outros interessados na teoria, como WEYL, tiveram sucessores que não promoveram a parte de seu trabalho dedicada à teoria dos invariantes.

3) Os algebristas modernos, cujas teorias ocuparam uma grande parte da matemática moderna, construíram a história de tal modo que a teoria dos invariantes fosse excluída. É concebível pensar a álgebra moderna como descendente da teoria dos invariantes. Muitos de seus heróis foram teóricos dos invariantes e partes da álgebra moderna têm, de alguma forma, conexão com a teoria dos invariantes. Para os modernos algebristas, todavia, a teoria dos invariantes foi apenas periférica ao desenvolvimento do que constituiria a álgebra moderna. Eles enxergam sua tradição, passando por HILBERT e EMMY NOETHER, de tal modo impregnada pela linearidade de evolução que

essa tradição é central para quaisquer contribuições que ela reclame [xxii].

4) A geração contemporânea de investigadores é pretendente dos problemas da teoria dos invariantes mas não de sua vestidura. Ambas as classes são pequenas quanto ao número de seus integrantes. Os membros de uma das classes consideram-se especialistas em geometria algébrica, da qual apenas um pequeno recanto se ocupa dos problemas que estendem os quesitos da teoria dos invariantes. Os membros da outra classe apenas procuram aplicar a teoria dos invariantes à mecânica. Essas pessoas, embora reconheçam uma dívida para com a teoria dos invariantes, não lhe dão um impulso visível.

Assim, a teoria dos invariantes parece morrer, porque alguns de seus herdeiros estão perdidos (2), alguns não a fomentam (4), enquanto outros (3) reivindicam parte desse domínio como ramificação do gênio de sua especialidade. A razão de as últimas pretensões medrarem é a ausência de teóricos dos invariantes para impugná-las. Portanto, a visão que prevaleceu, desde 1930, acerca da teoria dos invariantes foi a que se disseminou com o crescimento da álgebra moderna.

Em diversos momentos da narrativa, os matemáticos notaram que a obra de HILBERT determinou o fim da teoria dos invariantes em 1893. WEYL disse que HILBERT quase matou a disciplina. Os investigadores hodiernos entendem que HILBERT pôs fim ao antigo modo de se estudar o tema. E os algebristas modernos vêem a obra de HILBERT como um momento decisivo na evolução da álgebra: a teoria dos invariantes foi abandonada. Vimos, todavia, que a teoria dos invariantes não desapareceu em 1893. Seus especialistas a impeliram por, pelo menos, trinta anos, clamando por seu interesse e por sua importância.

Essa discrepância é característica da natureza assistemática das histórias, elaboradas por cientistas, de suas atividades. Ao criar para si um passado, a tradição agressiva da álgebra moderna, que se desenvolveu nas décadas de 1920 e 1930, omitiu a teoria dos invariantes. Atribuiu a HILBERT o papel de encerrar o assunto e de lançar parte dos fundamentos da própria álgebra moderna. Vimos anteriormente que as ações de HILBERT em 1893 tiveram um *status* anômalo. Seus ensaios foram considerados contribuições importantes à teoria dos invariantes. Suas declarações e a mudança de seu interesse, se significaram alguma coisa, representaram os sentimentos pessoais de HILBERT. Em 1893, não foram consideradas eventos pregressos. Porém, após quarenta anos, quando HILBERT é o mais famoso matemático vivo, elas foram tomadas por sinais da morte da teoria dos invariantes. Isto é, as ações de HILBERT assumem significado simbólico. Para matemáticos impregnados na tradição da álgebra moderna, elas significam a morte da teoria dos invariantes e, mais que isso, assumem o estatuto de explicações pelo falecimento da teoria. "O

que aconteceu com a teoria dos invariantes ? Ora, HILBERT resolveu seus problemas principais e matou a disciplina.”

Cabe-nos notar um último aspecto da evolução da teoria dos invariantes — os papéis desempenhados pela oposição entre as provas computacionais e as provas puramente existenciais — o estilo de praticar a matemática voltado à busca de exemplos específicos versus a procura de sistemas axiomáticos. A prova da finitude de GORDAN, em 1868, usou métodos para exibir explicitamente os invariantes independentes. Esse tratamento do problema geral era corrente, até que HILBERT aduziu uma solução existencial. Os algebristas modernos aclamam a obra de HILBERT como grande avanço. Eles medem GORDAN e a teoria dos invariantes segundo a escala da retórica dos sistemas axiomáticos abstratos. Para eles, os sistemas de axiomas, como os de NOETHER, unificam e esclarecem o que é essencialmente matemático nos objetos examinados. As metas são teoremas que classificam os diversos objetos ou teoremas que mostram poder ser feita uma certa coisa. As classificações e as construções em ato têm importância apenas secundária. A teoria clássica dos invariantes com todos os seus cálculos é um tipo de matemática um pouco inferior, merecidamente suplantado pelas teorias dos algebristas modernos, segundo a própria concepção desses últimos. Certamente que há pessoas que se colocam em uma posição um tanto diferente. STUDY, por exemplo, defendia o uso de cálculo específico e encontrou nas generalidades daqueles a quem criticava uma matemática amorfa sem corpo. Para ele, a teoria dos invariantes com todas as suas muitas equações revela a estrutura da matemática. Os mecânicos do contínuo, ainda que não se alinhem com STUDY, não aceitam a opinião dos algebristas modernos; pois aceitá-la significaria colocar seu trabalho em um nível matemático inferior, o que é exatamente a caracterização contra a qual estão pugnando.

Poderemos prosseguir, multiplicando indefinidamente esse diálogo. Hoje em dia, a maior parte dos matemáticos faz eco à posição dos algebristas modernos da década de 1920. Há alguns, porém, que oferecem “essências” alternativas da matemática. O tema do cálculo versus a abstração é recorrente nas disputas matemáticas. Nenhum dos dois lados vence e há muitas posições intermediárias. O que nos interessa não é a aparente verdade de um dos dois lados mas é que, no caso do desaparecimento da teoria dos invariantes, os promotores de ambas as concepções usam suas noções do que propriamente é matemática para ordenar e explicar os eventos.

Em resumo, vimos como as histórias construídas por membros de especialidades matemáticas distintas podem conduzir a considerar a teoria dos invariantes como uma disciplina morta. A teoria dos invariantes, considerada como uma categoria social, desapareceu, porque seus promotores não lograram bom êxito e porque aqueles que poderiam tê-la abrigado na tradição matemática escolheram outros eventos como suas histórias

heróicas, de sorte que a teoria dos invariantes já não é vista como parte importante e formativa da matemática moderna. Como corolário disso, vimos como o ato de HILBERT, com o passar do tempo, assumiu um significado simbólico. Notamos também que a retórica do método da matemática moderna forneceu uma explicação para as mudanças ocorridas.

Concluindo, gostaria de assinalar que a matemática, vista como categoria social, é significativamente diferente de seu retrato como ciência dedutiva. Os próprios matemáticos descrevem seu mundo nos termos de dedução e de progresso por meio de abstração. Isso não ocorre por eles deliberadamente distorcerem os eventos mas por que os aspectos de seu mundo é fabricado nesses termos. Portanto, ao reconstruírem as histórias de eventos e ao exporem agressivamente suas idéias, os matemáticos fornecem descrições e explicações, não como observadores neutros mas como pessoas profundamente comprometidas com a tradição na qual foram industriados. Aqui, ao olharmos os comportamento de algumas pessoas que, por suas ações, criaram essa tradição, podemos começar a ver como a matemática difere de sua caracterização usual; isto é, podemos começar a ver como, sendo um domínio do comportamento humano, a matemática é constituída em uma entidade complexa e variegada nas vidas daqueles que participam na sua construção.

Notas

[I] Esta discussão não possui conexões com os conceitos metamatemáticos ou lógicos de uma teoria formal.

[II] A noção de categoria social foi extensivamente tratada diversos autores. De modo geral, podem ser considerados como definidores de categorias sociais quaisquer modos distintos segundo os quais grupos de pessoas conjuntamente percebem seu meio ambiente. Por exemplo, as categorias *sanidade* e *insanidade*, *homossexualidade* e *heterossexualidade*, *delinqüência*, *ser nazista*. Ou, no que tange a coisas mais concretas, *os graus percebidos de rigidez*, *os componentes do arco-íris*, *aqui* e *ali*. Cf. EMILE DURKHEIM, *Elementary Forms of Religious Life*, Londres, Allen & Unwin, capít. 4. ALFRED SCHUTZ, *Collected Papers*, Haia, Nijhoff, 1964, vol. II. HOWARD S. BECKER, *Outsiders*, Londres, Free Press, 1963, capít. 1. MAX WEBER, *The fundamental concepts of Sociology*, in: *Theory of Social and Economic Organization*, T. PARSONS (ed.), Glencoe, Free Press, 1947.

[III] As noções de cálculo e computação relacionam-se com o conceito de construção. Em uma prova construtiva, enuncia-se um procedimento explícito para a construção ou a determinação da entidade procurada. Em uma prova abstrata de existência, mostra-se apenas que a entidade tem existência matemática, sem se anunciar nenhum método de determiná-la. (Em matemática, podemos

descobrir as propriedades de objetos, sem sermos capazes de exibir nenhum deles.)

[IV] Para um matemático contemporâneo, muitos desses nomes trazem consigo uma aura característica. É natural que, do ponto de vista de várias especialidades, cada uma dessas pessoas seja vista a uma luz diferente. Contudo, de um modo geral, BOOLE é encarado primeiramente como o inventor da álgebra da lógica; a KLEIN pertence a invenção dos grupos de transformação; sua elaboração é devida a LIE; CAYLEY contribuiu à geometria algébrica, sendo considerado, juntamente com SYLVESTER, como um dos matemáticos mais prolíficos do século; CLEBSCH é um geômetra; LINDEMANN e HERMITE provaram que π e e são transcendentos; e HILBERT é considerado um dos maiores matemáticos do século vinte. À exceção de GORDAN, cada um dos outros nomes referidos será encontrado por alguns estudantes graduados de matemática, durante sua educação. Juntamente com determinados teoremas associados a esses nomes, um matemático atribui uma ordenação quanto a sua importância. A conjunção de nomes, teoremas e gradação é parte do equipamento de um matemático e é freqüentemente manifesta em suas conversas com os colegas. Ainda que um matemático não esteja consciente da extensão ou da natureza exata do trabalho de uma pessoa famosa, as referidas associações permitir-lhe-ão compreender ou orientar-se para uma descrição que o envolva; isto é, um matemático dispõe de um sistema de categorias comumente aceitas a que ele pode recorrer, a fim de apreciar o que se está dizendo. Portanto, um matemático dispõe de uma moldura na qual enquadre uma narrativa não elaborada acerca de personagens históricas ou contemporâneas, embora esse matemático saiba muito pouco acerca da época e da obra dessa personagem.

[V] A linha de desenvolvimento matemático discutida nesta seção pode assim ser imaginada. Uma quântica é uma função de diversas variáveis, à qual está atribuído um grau. A uma dada quântica podem associar-se outras funções, denominadas seus invariantes. O problema geral consiste em mostrar que, para cada quântica de um número qualquer de variáveis de qualquer grau, existe, em um certo sentido, uma base finita [do subespaço] de todos os invariantes a ela associados (isto é, que existe apenas um número finito de invariantes independentes). A dificuldade real em obter uma solução afirmativa a esse problema ocorrerá, quando a quântica depende de mais de duas variáveis.

Mais tecnicamente, seja $f(a, b, \dots, c; x, y, \dots, z)$ um polinômio homogêneo de grau n nas p variáveis $x, y, \dots, z$, sendo $a, b, \dots, c$ os seus coeficientes. Seja T uma transformação arbitrária e não singular nas variáveis $x, y, \dots, z$. Sendo T aplicada a f , os coeficientes $a, b, \dots, c$ se transformam nos coeficientes $a', b', \dots, c'$. Ora, uma função g dos coeficientes de f é denominada um invariante de f , se a

seguinte condição for verificada por toda transformação T e por algum inteiro fixo k :

$$g(a', b', \dots, c') = |T|^k \cdot g(a, b, \dots, c),$$

sendo $|T|$ o determinante de T .

O problema central da teoria clássica dos invariantes consistia em encontrar uma base finita do espaço dos invariantes de um sistema de quânticas. Quando GORDAN resolveu o problema para formas ou quânticas de duas variáveis, começou a busca de uma solução para o caso de três variáveis.

[VI] A álgebra moderna formulada por SALMON parece-se um pouco com o que hoje é ensinado como álgebra no segundo ciclo. Quanto ao conteúdo, era muito mais complexa, dependendo de fatos especiais acerca de funções simétricas e lidando com as propriedades de curvas e com seus invariantes sob transformações das variáveis. Após muito anos da publicação do livro, atribuíam-se a popularidade da teoria dos invariantes ao amplo uso desse texto.

[VII] É questão aberta o que GORDAN pretendeu dizer com esse pronunciamento. Seu amigo, M. NOETHER, e E. T. BELL interpretam o comentário de GORDAN como alguma coisa do tipo: "O que Hilbert fez não é matemática genuína." Por outro lado, G. KOWALEWSKI, uma estudante na década de 1980, entendeu o comentário de GORDAN como elogio ao teorema de HILBERT — como se fosse dado por Deus (14).

Se GORDAN teve objeções ao teorema de HILBERT, não as conservou por muito tempo. Poucos anos depois, GORDAN publicou uma versão simplificada e aprimorada, usando ainda as idéias básicas de HILBERT e o método existencial. É a versão por GORDAN do teorema de HILBERT que figura na maioria dos textos. Posteriormente, os matemáticos tomaram entenderam o comentário de GORDAN como a tentativa de um "calculador" reacionário em obstruir o progresso da matemática, exemplificado no teorema de existência abstrata de HILBERT.

[VIII] Devemos ser cautelosos, ao avaliarmos as tendências indicadas neste e nos gráficos seguintes. Ainda que a maioria dos matemáticos não conte os números de artigos sobre disciplinas distintas, eles estão vagamente cômicos da quantidade de produção em sua própria especialidade e nas vizinhas. Isso se patenteou em uma conversa entre mim e um bem conhecido matemático. A fim de me mostrar que não havia muito interesse em um campo no qual ele fizera bastante trabalho, tomou do fascículo mais novo de um periódico matemático de resumos que se encontrava na sua escrivaninha e procurou na seção pertinente. Ao indicar as novas contribuições ali

referidas, ele acreditava estar recorrendo a um índice adequado do montante da atividade naquele ramo.

Assim, poderemos encarar o gráfico como um artefato impreciso da comunidade matemática. Os matemáticos estão vagamente conscientes disso. Porém somente o gráfico não é suficiente para determinarmos o que um campo de pesquisa significa para os matemáticos.

O número de artigos revisados em 1887 equivale a 27% dos 168 sobre álgebra como um todo, em 1890 – 32% de 130 e, em 1900 – 20% dos 156 artigos sobre álgebra.

[IX] Considerando algumas mudanças editoriais, verificamos que o censo de 1910 representa 17% dos 163 artigos em álgebra e o de 1923, 10% dos 187 artigos.

[X] A linha técnica de desenvolvimento referida no resto desta seção é distinta da descrita na Seção II. Em termos simples, objetos X (as quânticas) são submetidos a processos Y (um grupo de transformações) e são obtidos alguns outros objetos Z (os invariantes sob o grupo de transformações). Este esquema foi generalizado de vários modos diferentes. Em primeiro lugar, as noções vinculadas aos processos Y foram clarificadas e tornadas mais definidas. Mediante o uso das idéias de KLEIN acerca de grupos de transformação, propostas depois de 1870, verificou-se que os processos Y constituíam um grupo de transformações, de sorte que se poderiam considerar os invariantes que ocorriam em subprocessos, isto é, os invariantes associados a subgrupos. Os exemplos já citados disso foram DICKSON (que considerou os invariantes de grupos modulares) e NOETHER (que provou a existência de bases racionais e inteiras de invariantes sob um grupo de transformações). Veremos, posteriormente, que teoremas similares foram instituídos para outros subgrupos. Outro modo de generalizar o esquema consiste em considerar os distintos tipos de X . Ao invés de invariantes de quânticas, consideram-se os invariantes de tensores ou de vetores (em espaços de representação) e, hoje em dia, funções de anéis sobre variedades. Nesses casos, devem mudar não apenas as idéias acerca do que deva ser um X mas também as idéias relativas à natureza dos Z .

[XI] O enunciado de HILBERT, em uma de suas várias versões originais, usava a linguagem dos módulos de KRONECKER (alguma coisa parecida com um anel) mas as idéias foram aplicadas à teoria dos invariantes. O primeiro ensaio que continha seu teorema foi escrito muito mais no contexto da teoria dos invariantes.

[XII] Um anel de polinômios, em um número finito de variáveis sobre um anel com identidade que satisfaça à condição da base finita, também satisfaz a essa condição.

[XIII] Ao escrever esse texto, STUDY tinha sessenta e um anos. Seu biógrafo informa que, em diversas ocasiões, ele proferira críticas apressadas e mordentes ⁽²⁷⁾. STUDY estava escrevendo em uma época na qual os matemáticos, concitados pela teoriada relatividade, se tornaram muito interessados pelas análises vetorial e tensorial. Não encontrei evidência alguma de que os próceres nesse novo campo houvessem manifestado hostilidade contra a teoria dos invariantes. Os comentários de STUDY podem ser considerados uma reação ao fato de que os que se deixaram fascinar pela análise vetorial houvessem justamente ignorado a teoria dos invariantes.

[XIV] A produção de 1930 corresponde a 9% dos 203 artigos sobre álgebra e a produção de 1938 corresponde a 4% dos 208 artigos. O aumento de 20% nas contribuições à álgebra é aproximadamente o mesmo que o incremento no total de ensaios resenhados na *Fortschritte*.

[XV] Associados à estrutura algébrica de tensores nos espaços de representação de grupos de transformações lineares.

[XVI] Weyl usa agora não apenas vetores e tensores mas também a teoria da representação dos grupos.

(Sejam x e y vetores no espaço de representação de um grupo linear G . Then f , a função no espaço de representação, é um invariante, se $f(x, y, \dots) = f(gx, gy, \dots)$, para todo g pertencente a G .)

[XVII] Como percebemos, ao conversarmos com matemáticos acerca de teorias obsoletas.

[XVIII] Uma variedade é uma estrutura complicada na geometria algébrica. Os invariantes de uma variedade V , relativos a um grupo G , são, em um certo sentido, as funções do espaço quociente V/G , isto é, as funções que são constantes ao longo das órbitas de G . O problema central é a existência de V/G e, perifericamente, a geração finita do anel de funções invariantes, isto é, a generalização do teorema de HILBERT ⁽³⁶⁾.

[XIX] O principal ponto de interesse é a equação constitutiva da mecânica do contínuo, $T = f(A, B)$, na qual T é o tensor de esforço e A e B são matrizes cinemáticas ⁽⁴⁰⁾. É investigada a classe de funções f que são invariantes sob o grupo de simetrias do material considerado. De início, são consideradas as funções polinomiais, por serem mais dóceis. Em seguida, consideram-se funções mais gerais ⁽⁴¹⁾. Em ambos os casos, a classe das funções é descrita mediante bases de invariantes. Para um descrição geral dos problemas, cf. a referência 42.

[XX] É interessante apontar que há um outro setor no qual foram considerados alguns problemas da teoria dos invariantes. Esse é restrito a poucos físicos, industriados em matemática, que

trabalham com problemas da teoria quântica dos campos ⁽⁴³⁾. Leram WEYL e têm consciência das obras anteriores porém não as examinaram. Seus escritos não circulam amplamente entre os físicos; e os físicos, em sua maioria, não se interessariam pelos quesitos matemáticos refinados com que essas pessoas se ocupam.

Notável nessas três classes contemporâneas de pessoas interessadas em alguns dos aspectos da teoria dos invariantes (os que investigam a geometria algébrica, os mecânicos do contínuo e esses físicos) é que, aparentemente, uma qualquer delas não tem consciência da existência das outras.

[XXI] Em 1930 foi publicada a *Moderne Algebra* de B. L. VAN DER WAERDEN. Desde então, foi reimpressa diversas vezes e traduzida em muitos idiomas distintos. Por volta de 1934, é referida como a obra canônica em seu campo. Seu tratamento axiomático abstrato da álgebra é presentemente tão fundamental ao campo que a maioria dos matemáticos não imagina como se possa praticar álgebra de outro modo. O livro é a pedra fundamental da álgebra "moderna", tendo sido usado na educação de matemáticos durante os últimos vinte e cinco anos.

[XXII] Cabe notar que as diversas teorias que confluíram para compor a álgebra moderna, até a emergência dessa última, não eram consideradas interligadas. No que tange à teoria dos anéis, foi dito que "[as teorias que precedem a álgebra moderna], de início, aparentemente diversificadas e mais ou menos independentes, foram admiravelmente combinadas por E. Noether como a teoria geral dos ideais — "(46). Temos aqui um indício da noção de que a história da evolução da álgebra moderna, como é enxergada pelos algebristas modernos, não seria coerente, se não considerasse aquilo em que se tornou a álgebra moderna. Isto é, a perspectiva dos algebristas modernos acerca da história da evolução de seu ramo é teleológica, na medida em que o resultado do desenvolvimento da álgebra moderna determina como a disciplina teve que se desenvolver.

Referências

- (1) EVERETT C. HUGHES, *American Journal of Sociology* **66**, 533 (1961).
- (2) MARY RUE BUCHER, "Conflicts and Transformation of Identity", Ph. D. Dissertation, Department of Sociology, University of Chicago, 1961.
- (3) ANSELM L. STRAUSS, *Images of the American City*. New York: Free Press of Glencoe 1961; e Alfred Schutz, *Collected Papers II*. Haia: Nijhoff 1964.
- (4) I. LAKATOS, "Proofs and Refutations, *The British Journal for the Philosophy of Science* **14** (maio 1963 - fevereiro 1964).

- (5) FRANZ MEYER, "Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie" [relato acerca da situação atual da teoria dos invariantes], *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **1** (1890-1891).
- (6) ARTHUR CAYLEY, "On Linear Transformations" (1846), in *Collected Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge: The Press, 1889, p. 95.
- (7) *Ibidem*, "Notes".
- (8) JOHN T. MERZ, *A History of European Thought in the 19th Century*, vol. 3. London: Blackwood, 1896-1914, p. 684, sentença proferida em 1864.
- (9) MAX NOETHER, "Paul Gordan", *Math. Ann.* **75**, 1-45 (1914).
- (10) A. CLEBSCH, *Theorie der Binären Algebraischen Formen*. Leipzig: Teubner, 1872.
- (11) PAUL GORDAN (ed. G. KERSCHENSTEINER). *Invarianten Theorie*, 2 vols. Leipzig: Teubner, 1885-1887.
- (12) *Ibidem*, vol. 1, "Introduktion".
- (13) E. T. BELL, *The Development of Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1940.
- (14) Conhecimento popular matemático. Cf. *op. cit.*, BELL, p. 429; também *op. cit.*, NOETHER; e G. KOWALEWSKI, *Bestand und Wandel*. Munique: Oldenbourg, 1950, p. 25.
- (15) H. S. WHITE, "Report on the progress of projective invariants: the chief contributions of a decade", *Bull. Amer. Math. Soc.* **5**, 161-175 (1899), pp. 162 e 165.
- (16) DAVID HILBERT, "Über die Theorie der Algebraischen Invarianten", *International Mathematical Congress*, New York: Macmillan 1896.
- (17) DAVID HILBERT, "Über die vollen Invariantensysteme:", *Math. Ann.* **42**, 313-373 (1893), p. 373.
- (18) P. BLUMENTHAL, "Hilberts Lebensgeschichte", in DAVID HILBERT, *Gesammelte Abhandlung*. Vol. 3, Berlin: Springer, 1935, p. 391.
- (19) F. MEYER, resenha no *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* **28**, 103 (1897).
- (20) R. A. ROBERTS, "Modern Mathematics", *Royal Irish Academy, Proceedings*. 3rd series, **1**, 151-156 (1899-1891), p. 154.
- (21) *Op. cit.*, WHITE, p. 162.
- (22) A. A. ALBERT, "Lenard Eugene Dickson", *Bull. Amer. Math. Soc.* **61**, 331-345 (1955).
- (23) HERMANN WEYL, "Emmy Noether", *Scripta Mathematica* **3**, 205 (1935). B. L. VAN DER WAERDEN, "Nachruf auf Emmy Noether", *Math. Ann.* III, 469 (1935).

- (24) R. WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*. Groningen: Noordhoff, 1923.
- (25) E. STUDY, *Einleitung in die Theorie der Invarianten*. Braunschweig: F. Viewig, 1933.
- (26) E. STUDY, *Methoden zur Theorie der Ternären Formen*. Leipzig: Teubner, 1889.
- (27) FRIEDRICH ENGEL, "Eduard Study", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **40**, 133-156 (1931).
- (28) HERMANN WEYL, *Classical Groups, their Invariants and Representations*. Princeton: Princeton University, 1939, p. VII.
- (29) *Ibidem*, p. 27.
- (30) N. JACOBSON, resenha de Classical Groups, de WEYL, no *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 592 (1940).
- (31) HERMANN WEYL, "A half century of mathematics", *American Mathematical Monthly* **48**, 523-553 (1951).
- (32) *Mathematical Reviews*.
- (33) WARREN HAGSTROM, *The scientific Community*. New York: Basic Books, 1965, p. 233. Também conversas com matemáticos.
- (34) Em uma conversa com o presente autor, em 1965.
- (35) Entrevista com o autor, 1965.
- (36) ROSENBLIGHT, "Transformation Spaces, Quotient Spaces, and Some Classification Problems", autobiografia não publicada, Berkeley, University of California, sem data.
- (37) C. TRUESDELL, "The modern spirit in applied mathematics", *I. C. S. U. Review of World Science* **6**, 204 (1964).
- (38) Correspondência, 1966.
- (39) R. S. RIVLIN, "Further remarks on stress-deformation relations for isotropic materials", *Journal of Rational Mechanics and Analysis* **4**, 683 (1955).
- (40) *Ibidem*, pp. 681-702.
- (41) A. C. PIPKIN & A. S. WINEMAN, "The material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations", *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **12**, 420-426 (1963) and "Material symmetry restrictions on constitutive equations", same journal **17**, 184-214 (1964).
- (42) *Op. cit.*, TRUESDELL, pp. 95-205.
- (43) Narrado por um jovem físico que trabalha com esses problemas.
- (44) B. L. VAN DER WAERDEN, "Nachwort zu Hilberts algebraischen Arbeiten", em DAVID HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer, 1933, p. 401-403.

- (45) O. ORE, "Abstract ideal theory", *Bull. Amer. Math. Soc.* **29**, 728 (1933).
- (46) F. S. MACAULEY, "Modern algebra and polynomial ideals", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1) **30**, 27 (1933/1934).

A pesquisa para este ensaio foi conduzida sob os auspícios da School of Nursing, University of California Medical Center, San Francisco. Foi revista na Princeton University com uma bolsa de pós-doutoramento.

Fico obrigado a ANSELM L. STRAUSS por sua orientação, a THOMAS S. KUHN por seus comentários críticos e a HOWARD S. BECKER, KENNETH O. MAY, PAUL FORMAN e KARL HUFBAUER por suas prestimosas sugestões. Desejo agradecer a C. TRUESDELL por me chamar a atenção para os materiais sobre mecânica do contínuo.

Título original:

The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge.

Arch. History of the Exact Sciences, 3 (1966), p. 137-159.

(Recebido em 3 de abril de 1966.)