Do logicismo ao pragmatismo – aspectos epistemológicos da matemática.

Marcelo Papini

Sinopse

Talvez se possa afirmar que a invenção do cálculo infinitesimal tenha sido a maior criação na matemática desde o tempo de Euclides de Alexandria. O emprego desse instrumento, contudo, aduziu quesitos angustiantes acerca do estatuto ontológico dos enunciados matemáticos, que se vierem reunir aos problemas já colocados pelos pensadores da antiguidade e da era medieval. No intuito de se classificarem as respostas dadas a esses quesitos, buscaram-se afinidades entre elas, sendo freqúente identificarem-se três correntes dominantes: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. No presente ensaio, procurou-se apontar uma quarta corrente, o pragmatismo, que, de forma às vezes velada, permeia todas as outras.

Sumário

1 - Introdução

> "Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première." LACROIX, Sylvestre (1810). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Apud DELACHET 1949, p. 53.

Embora não conhecessem muitas curvas, os gregos da idade antiga conceberam a noção de reta tangente a uma curva. Euclides de Alexandria definiu como tangente a um círculo a reta que encontra o círculo em apenas um ponto e que não o corta. Desde então, o problema da construção de tangentes a uma curva consiste em descrever um procedimento de traçado de retas que toquem essa curva e em demonstrar que essas retas tocam a curva considerada em apenas um ponto. Apolônio de Perga estudou a construção de tangentes à elipse, à hipérbole e à parábola e Arquimedes de Siracusas forneceu a construção de tangentes a uma espiral. (BARON 1985, p. 52-53; DELACHET 1949, p. 15.) O problema da construção de tangentes foi retomado, na idade moderna, por Giles de Roberval e Pierre de Fermat e despertou muito interesse após a publicação por Réné Descartes de sua *Géométrie* (1637).

Coroando esforços despendidos por vários estudiosos, Gottfried Leibniz, em 1684, publicou *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus* ... [novo método para os máximos e os mínimos bem como para tangentes ...]. Esse novo método de cálculo, posteriormente denominado *cálculo infinitesimal*, fora concebido precipuamente para determinar máximos e mínimos e para construir retas tangentes a curvas planas.

Cabe apontar que o método de Leibniz foi fortemente criticado por Bernard Nieuwentijt (1694) assim como a *teoria das fluxões* divulgada por Isaac Newton, em 1704, com desígnios afins aos de Leibniz, seria duramente impugnada por George Berkeley, em seu libelo *The Analyst* (1734). (STRUIK 1967, p. 111, 114.)

A receptividade inamistosa não impediu que o método de Leibniz se disseminasse na comunidade, sendo vigorosamente usado pelos irmãos Jakob e Johann Bernoulli em uma ampla variedade de contextos. Já em 1696, foi publicado em Paris o tratado *Analyse des Infiniments Petits, pout l'Intelligence des Lignes Courbes*, composto por Guillaume de l'Hospital, ancorado em lições de Johann Bernoulli (SIERKSMA & SIERKSMA 1999, p. 440; CHILOV 1973a, p. 232).

Nas mãos de Leonhard Euler, que fora discípulo de Johann Bernoulli, o cálculo diferencial permitiu uma transformação radical da mecânica formulada por Isaac Newton (*Mechanica, sive motus scientia analytica exposita, 1736; Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, 1765)*. E essa nova mecânica, por sua vez, suscitou um novo problema, a tarefa de resolver equações diferenciais. Também a geometria diferencial, resultante da aplicação do cálculo diferencial à geometria, se constituiu em fonte copiosa de equações diferenciais. (GERMAIN 1962, p. 234; LORENZO 1987, p. LXXVII.)

Nessa fase de maturação do cálculo infinitesimal, o valor predominante era a riqueza dos resultados, que lhe justificavam o emprego. Não quer isso dizer que não houvesse dúvidas. Que as havia é patente no conselho supostamente dado por Jean d'Alembert a um consulente inquieto: *"Allez en avant et la foi vous viendra."* (STRUIK 1967, p. 149.) Por outro lado, a firme crença no cálculo infinitesimal se manifesta na anedota sobre Pierre Laplace que, havendo publicado os cinco tomos de sua monumental *Mécanique céleste* (1799-1825) e sendo importunado por Napoleon Bonaparte, por não haver citado uma única vez a divindade, lhe teria respondido: *"Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse*." (STRUIK 1967, p. 135.)

Incumbe acentuar que os problemas decorrentes do emprego do novo método conduziram à revigoração e ao amadurecimento dele próprio, permitindo fosse ele aplicado a situações que advieram ou que foram criadas mediante investigações que somente se puderam efetuar às expensas desse mesmo método. Parodiando BACHELARD (1934, p. 58), podemos dizer que o cálculo infinitesimal criou o seu próprio objeto de estudo, a teoria das funções, "assim como o microscópio criou a microbiologia".

Um dos problemas aduzidos pelo cálculo infinitesimal foi o conceito de função. Segundo d'Alembert, as funções podiam exprimir-se por uma equação entre as variáveis y e x; segundo Euler, as funções podiam representar-se por uma curva traçada à mão livre (*curva quaecumque libero manus ductu descripta*). O estudo das vibrações transversais de uma corda estendida (como uma corda de violino), conduziu a uma equação diferencial, para a qual d'Alembert (1747) e Euler (1748) encontraram uma solução, enquanto Daniel Bernoulli (1753) propusera como solução uma série de funções circulares, isto é, uma série cujos termos eram senos ou cossenos de certos ângulos. Bernoulli sustentava que sua solução era absolutamente geral, encerrando em sua expressão a solução apresentada por d'Alembert e por Euler, asserto que Euler não aceitava. Em sua *Théorie mathématique de la chaleur* (1811), Joseph Fourier representou diversas funções mediante tais séries de funções circulares e afirmou que toda função admitiria esse tipo de representação (presentemente designada como *série de Fourier*). Foi corrigido por Peter Dirichlet (1829), que mostrou não ser toda função representável por séries de Fourier, explicitando um critério para a validade de uma tal representação. As condições exigidas nesse critério eram tão tênues, que Dirichlet foi levado às fronteiras do que se poderia conceber como função e, enfatizando a correspondência unívoca entre os valores da variável independente e os valores da variável dependente, foi induzido a recusar que a definição de uma função impusesse a explicitação de uma fórmula ou de um procedimento de cálculo. (Autores russos, como LAURIENTIEV e NIKOLSKI (1973, p. 108) informam que Lobachevski, simultanea e independentemente, aduzira a mesma definição.) O próprio Dirichlet (1828) dera um exemplo de uma função cujo gráfico não pode ser desenhado. Bernard Bolzano (1830) apresentou um primeiro exemplo de uma função contínua, representável por uma curva que não admite reta tangente em nenhum de seus pontos. Assim se configurou o enredo descrito na balada *Der Zauberlehrling* de Goethe. Concebido inicialmente como um instrumento de construção de retas tangentes, o cálculo infinitesimal propiciou a construção de curvas que não admitem tangente por nenhum de seus pontos. (CHILOV 1973a, p. 232; CHILOV 1973b, p. 218; DAVIS & HERSH 1985, p. 298; DESANTI 1962, p. 181-182; EDWARDS 1992, p. 7; FIGUEIREDO 1977, p. 40-42; NIKOLSKI 1973, p. 341-344; PASTOR et alii 1951, p. 357; STRUIK 1967, p. 157, 168.)

2 - O logicismo

O citado exemplo de Bolzano, ao qual sucederam outros apresentados por Bernhard Riemann (1854) e por Karl Weierstrasz (1875), constituiu grave argumento contra uma suposta faculdade sobre a qual pairava incipiente suspeita: a intuição De fato, a existência de curvas que não admitem tangente por nenhum de seus pontos não se considerava um fato intuitivo. Nada obstante, os recursos do cálculo infinitesimal permitem construir tais curvas. Segundo a interpretação de DESANTI, “une telle découverte ne révèle pas seulement l’autonomie des techniques de l’analyse par rapport à la géométrie. [...] Désormais le support de l’intuition géométrique manque à l’analyse; elle doit fonder sur elle-même ses propes principes, et délimiter par ses propres moyens son domaine”. E, no contexto desse colapso da intuição, se formula a dúvida angustiante da fundação do saber matemático, nas palavras de DESANTI: “Si l’intuition géométrique ne suffit plus à garantir de l’absurdité, où trouver un critère suffisant de clarté et de rationalité?” (DELACHET 1949, p. 57; DESANTI 1962, p. 182; STRUIK 1967, p. 157).

Ora, sustentava Immanuel Kant (1781) que todo conhecimento consiste em dois elementos: a *intuição* (*Anschauung*, em língua alemã) e o *conceito*. Mediante a intuição, o objeto do conhecimento nos é dado e está presente na sensibilidade; através do conceito, esse objeto é pensado pelo entendimento. Se não houver essa correspondência biunívoca entre os dois elementos, o conhecimento não será adequado. Como exemplo de um conceito ao qual não corresponde intuição alguma, cita-se o calórico, aduzido para explicar as variações térmicas verificadas nos diversos corpos. Como exemplo de uma intuição à qual não corresponde conceito algum, referem-se as ilusões, como a de uma vareta parcialmente imersa em um líquido a qual, pela refração da luz, parece envergada. Para provar que o espaço e o tempo são intuições puras, Kant recorre a dois tipos de argumentos, que ele classifica como *metafísicos* e *transcendentais*. O argumento transcendental relativo ao espaço decorre da geometria. Kant sustenta que a geometria (euclidiana) é conhecida *a priori*, embora os seus enunciados sejam sintéticos, isto é, não se podem inferir somente da lógica. As provas geométricas dependem das figuras e os objetos de percepção devem obedecer à geometria (euclidiana), pois a geometria trata de nosso modo de perceber. (BRAGA 1991, p. 21-25; RUSSELL 1945, p. 712-714; SCHMIDT 1974, p. 328-329.)

Ora, a invenção de sistemas geométricos distintos do euclidiano (Nikolai Lobachevski, 1829; Janos Bolyai, 1832; Riemann, 1854) foi considerada uma prova contra a teoria de Kant. Contra ela já se havia insurgido Bolzano (1810), que contestara simultaneamente as noções de juízo sintético *a priori* e de intuição pura, afirmando que sempre a intuição é empírica, quer se trate de fenômeno espacial ou temporal, declarando que as figuras nas demonstrações geométricas constituem apenas um recurso pedagógico e asseverando que, a fim de dotar a matemática de fundamentos sólidos, cumpre purificá-los de todo elemento intuitivo, concebendo-os de modo radicalmente lógico. E na trilha aberta por Bolzano contra a intuição avançaram George Boole, Charles Peirce, Giuseppe Peano e Gottlob Frege. (BARBOSA 1995, p. 42-44; DELACAMPAGNE 1997, p. 18-27; YAGLOM 1979, p. VI-VII.)

George Boole compartilhou com Leibniz a concepção de que a matemática não constitui apenas a ciência do número ou da quantidade, mas uma genuína linguagem formal, de vocação universal. Acredita na viabilidade em aplicar os métodos algébricos a uma variedade de ramos do saber — universos de discurso — e dedica-se a revigorar a teoria do silogismo, que remonta a Aristóteles. Em seus livros *The mathematical analysis of logic* (1847) e *An analysis of the laws of thought* (1854), mostrou como a leis da lógica formal, expostas por Aristóteles e ensinadas nas universidades, durante séculos, se poderiam tornar o objeto de um cálculo. Instituiu princípios em harmonia com a idéia de uma *characteristica universalis*, que fora concebida por Leibniz. (DELACAMPAGNE, p. 21; SCHMIDT 1974, p. 74-75; STRUIK 1967, p. 173.)

Contrariando Kant, Gottlob Frege se convencera de que as proposições aritméticas não são juízos sintéticos *a priori* mas juízos analíticos, que se poderiam demonstrar sem recurso à intuição. E que isso não nos pareça evidente decorre de formularmos os enunciados aritméticos em nossa língua vernácula, inadequada como instrumento científico. Cumpre, portanto, reformular toda a aritmética na única linguagem na qual a intuição não desempenhe papel algum, a linguagem lógica. Essa tarefa, Frege a iniciou em sua primeira obra, a *Begriffsschrift* (1879), na qual introduziu um simbolismo mais pesado que o de Boole, que lhe permitiria efetuar o cálculo dos predicados, mediante os quantificadores, e propiciaria reconstruir o cálculo das proposições, inventado pela escola estóica mas ignorado por Aristóteles. (DELACAMPAGNE 1997, p. 24-25, 40-42; SCHMIDT 1974, p. 191-192)

Nos *Grundlagen der Arithmetik* (1884), inaugurou a tese (posteriormente denominada *logicista*) de que a matemática se pode reduzir à lógica. Especificamente, ancorado nas noções e nos princípios lógicos, Frege empreendeu a temerária tarefa de definir as primeiras noções aritméticas e de lhe demonstrar as principais proposições, o que exigiria também demonstrar a existência dos números naturais. Portanto, o empreendimento de Frege consistia em dois esforços:

a) Definir em termos lógicos todas noções matemáticas, inclusive aquelas correntemente consideradas primitivas ou irredutíveis.

b) Demonstrar, com o uso exclusivo de princípios lógicos, todas as proposições matemáticas, inclusive aquelas correntemente consideradas primitivas ou irredutíveis, o que implica na justificação lógica do princípio da recorrência.

O programa de Frege demonstraria a falsidade do empirismo e do psicologismo, já que a matemática se fundaria sem recurso à experiência ou a dados de natureza psíquica. (BETH 1955, p. 29, 119-120; NAGEL 1958, p. 42.)

Já no artigo *Über Sinn und Bedeutung* (1892), Frege apontou distinções que se mostrariam valiosas tanto para a lógica quanto para a análise glossológica. Aí ele distinguiu entre o sentido (*Sinn*) de um signo, que é conceito objetivo, a sua representação subjetiva (*Vorstellung*) e a sua referência (*Bedeutung*), constituída por um objeto.

A tese logicista foi retomada nas *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, cujo primeiro tomo veio a lume em 1893, sendo quase ignorado. Entre seus leitores estavam Giuseppe Peano e, por indicação desse, Bertrand Russell. Quando o segundo volume dessa obra se encontrava no prelo, Frege recebeu uma carta de Russell (16 de junho de 1902), na qual o pensador britânico anunciava modestamente um paradoxo (posteriormente designado como antinomia de Russell), que minava a arquitetura tão cuidadosamente elaborada (BETH 1955, p. 127; DELACAMPAGNE 1997, p. 41). Segundo COSTA 1992, p. 24, essa antinomia fora encontrada, independentemente, por Ernst Zermelo

A antinomia de Russell admite a exposição seguinte. Há dois tipos de classes: as classes que não contêm a si próprias como membros, a que chamaremos *normais*, e as classes que contêm a si próprias como membros. Como exemplo de classes normais, cita-se a classe dos filósofos, a qual certamente não é um filósofo; e como exemplo de classes que não são normais, aponta-se a classe dos objetos que podem ser concebidos pelos seres humanos, a qual também pode ser concebida pelos seres humanos. Designando por N o conjunto de todas as classes normais, podemos indagar se N é uma classe normal. Se N fosse normal, então N seria membro de N (pela definição de N) e, portanto não seria normal (pela definição de classe normal). Do mesmo modo, se N não fosse normal, então N seria membro de si própria (pela definição de classe que não é normal) e, portanto, seria normal (pela definição de N). (BETH 1955, p. 176; NAGEL 1958, p. 24.)

Após a troca de algumas cartas, Frege modificou um de seus axiomas e explicou, em um apêndice, que isso fora feito com o fito de restaurar a consistência de seu sistema. Nesse apêndice, escreveu textualmente (em seu vernáculo) que "dificilmente poderia suceder a um autor de ciência algo mais indesejável que verificar, após a conclusão de seu trabalho, que uma fundação de seu edifício fora abalada. Isso me ocorreu, ao ler uma carta do Sr. Bertrand Russell, quando a impressão do segundo volume estava quase concluída."

Mas essa modificação comprometeu a demonstração de alguns teoremas do primeiro volume de suas *Grundgesetze*. Cabe consignar que Frege professou o platonismo ontológico, na acepção de que defendia a existência absoluta das entidades matemáticas. E que, embora tenha contestado a Kant quanto à natureza das proposições aritméticas, se acordou com Kant quanto à natureza das proposições geométricas, cujos axiomas se captariam por uma intuição pura do espaço. Opôs-se fortemente à tendência, nascente entre os geômetras contemporâneos, em admitir que cada sistema geométrico descrevesse estruturas distintas, não cabendo decidir, apenas com instrumentos matemáticos, acerca da validade de tais sistemas. Esse fato merece aprofundamento por parte da história das idéias pois, se Kant não poderia prever a evolução futura da lógica, Frege certamente conhecia a invenção de sistemas geométricos distintos do euclidiano. (BETH 1955, p. 127-128; BOCHENSKI 1962, p. 231; MOSTERÍN 1987, p. 116-119.)

Adepto confesso do programa de Frege, Bertrand Russell escreveu em sua autobiografia, referindo-se ao Congresso Internacional de Filosofia, iniciado em 1º de agosto de 1900:

> "The Congress was the turning point of my intellectual life, because there I met [Giuseppe] Peano. I already knew him by name and had seen some of his work, but had not taken the trouble to master his notation. In discussions at the Congress I observed that he was always more precise than anyone else, and that he invariably got the better of any argument on which he embarked. As the days went by, I decided that this must be owing to his mathematical logic. ... It became clear to me that his notation afforded an instrument of logical analysis such as

I had been seeking for years ...” (apud O'CONNOR & ROBERTSON, verbete Russell).

Já em 1897, Cesare Burali-Forti deparou com um paradoxo no seio da teoria dos conjuntos. Em 1901, Russell demonstrou que não se tratava de quesito matemático mas de problema puramente lógico. Esposando, nessa época, o platonismo ontológico de Frege relativo ao conceito de número, Russell, em seus *Principles of mathematics* (1903), descreveu a antinomia que encontrara e experimentou três métodos para extingui-la (uma primitiva teoria dos tipos, a teoria do zigzag e a teoria sem classes); pouco depois, lhes acrescentaria a teoria da limitação de magnitude. A teoria do zigzag e a teoria da limitação de magnitude mostraram-se infecundas e a teoria sem classes revelou-se próxima à teoria dos tipos, de sorte que Russell se dedicou a refundir a última, que adquiriu a forma definitiva entre 1906 e 1908 e segundo a qual todos os objetos se distribuem em distintos tipos, instituindo uma hierarquia de variáveis. Assim, no domínio das classes, um indivíduo é do primeiro tipo, a classe dos indivíduos é do segundo tipo e uma classe de classes do segundo tipo é do terceiro tipo; se x for elemento de A, então A será de um tipo superior ao de x. Cada predicado, por sua vez, pertencerá à categoria que subordina imediatamente o sujeito. Graças a essa teoria dos tipos, pôde Russell construir, por primeiro, um sistema lógico isento de antinomias. (A despeito de repetidas tentativas, tanto quanto eu saiba, ainda não se conseguiu, sem recorrer à teoria dos tipos, construir um sistema isento de contradições. Podemos reinterpretar, como uma forma rudimentar da teoria dos tipos, a teoria de Aristóteles, de que os indivíduos sejam substâncias de primeiro grau e que espécies sejam substâncias de segundo grau.) (BETH 1955, p. 127-128, 185-186; BOCHENSKI 1962, p. 63; 231, 239; COSTA 1992, p. 27; DELACAMPAGNE 1997, p. 41; FEYS, p. 310.)

A aceitação da teoria dos tipos exigiu a introdução de três postulados que figuram na composição dos monumentais *Principia mathematica* (1910-1913), do próprio Russell e de Alfred Whitehead: o axioma da redutibilidade, o axioma do infinito e o axioma da escolha. (BETH 1955, p. 185-186; COSTA 1992, p. 28-30; DELACAMPAGNE 1997, p. 43; FRAENKEL 1993, p. 333-334.)

A introdução do axioma da redutibilidade vincula-se à admissão de *definições impredicativas*, que ocorrem quando, na definição de um conjunto, remetemos aos seus elementos, que se definem mediante o citado conjunto. Um exemplo de definição impredicativa é a seguinte: “Sejam C os habitantes de uma cidade e b o barbeiro, definido como o elemento de C que faz a barba de todos os elementos de C que não se barbeiam a si mesmos e somente desses elementos.” É fácil perceber que essa definição gera uma antinomia: b não pode barbear-se e, por isso, deve barbear-se. Ora, segundo Whitehead e Russell, o exame dos paradoxos revela que todos provêm de certa espécie de círculo vicioso, o que lembra a antinomia do mentiroso, aventada por Epimênides de

Creta. Assim, dizer algo acerca de todas as proposições não é admissível, pois esse dizer já constitui uma proposição. Instituíram, portanto, o princípio do círculo vicioso, para o qual propuseram algumas formulações, tacitamente admitidas como equivalentes, o que foi contestado por Kurt Gödel (1944). Talvez a formulação mais sólida seja a seguinte: “um domínio não pode ser concebido como uma totalidade, se contiver um elemento que só se pode definir em termos do próprio domínio”. (BETH 1955, p. 185-186; COSTA 1992, p. 26-27; EVES 1997, p. 676; FRAENKEL 1993, p. 335.)

Assim, a teoria dos tipos protege contra as antinomias mas também proscreve as definições impredicativas, que são consideradas indispensáveis. Para contornar esse obstáculo, Whitehead e Russell incorporaram o axioma da redutibilidade: “Dada qualquer propriedade de ordem maior que zero, existe uma propriedade de ordem zero que lhe é equivalente”. (Dizemos que duas propriedades são equivalentes, se todo objeto que gozar de uma delas também gozar da outra.) Na presença da teoria dos tipos, não se conseguiu tampouco efetuar a construção de conjuntos infinitos. Então, Whitehead e Russell admitiram o axioma do infinito, que postula a existência de uma pluralidade infinita de objetos. A fim de assegurar um alcance máximo a esse postulado, incluíram também o axioma da escolha, que fora formulado por Giuseppe Peano (1890) e enunciado como princípio independente por Beppo Levi (1904): “Dada uma família de conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, existe pelo menos um conjunto que tem exatamente um elemento em comum com cada membro da família.” (BETH 1955, p. 136, 186-187; COSTA 1992, p. 28-29; WEYL 1949, p. 49-50.)

Ainda que a teoria dos tipos haja eliminado as antinomias, ela decretou o ocaso da tese inicial do logicismo, pois a sua admissão exigiu o recurso a três axiomas cujo caráter não é puramente lógico, como pretendera Frege. Mas alguns críticos denunciam que o axioma da redutibilidade reintroduz, subrepticiamente, procedimentos impredicativos (SILVA 1989, p. 1).

3 - Origens do formalismo

Morrendo Alexandro de Macedônia, fragmentou-se o império por ele conquistado. O sátrapa que governava o Egito ascendeu à realeza, em 305 a. C., com o nome de Ptolemeu I Sóter. Na cidade portuária de Alexandria., esse monarca fundou um museu [centro de estudos dedicado às musas], dotado de uma biblioteca que se tornaria famosa. Esse museu constituiu-se em um importante núcleo de pesquisas, no qual, entre 320 e 260 a. C., trabalhou Euclides. Euclides escreveu uma obra, denominada *stoikheia* (elementos), que, provavelmente, foi o livro mais reproduzido e mais estudado no Ocidente depois da Bíblia (RONAN 1983, p. 116-117; STRUIK, 1967, p. 50). Segundo o testemunho de Bertrand Russell (RUSSELL

1972, p. 211-212), o único texto autorizado para o ensino da geometria em sua juventude ainda era o livro de Euclides.

O exame dos Elementos revela um projeto descritivo que consiste em quatro ingredientes: os conceitos primitivos, os conceitos definidos, as proposições primitivas e as proposições demonstradas (os teoremas, os lemas e os corolários). A forma de exposição adotada por Euclides configurou-se em modelo de todos os escritos posteriores que se pretenderam definitivos, como a *Ethica, geometrico more demonstrata* (1677), de Baruch Spinoza, e os *Naturalis Philosophiae Principia Mathematica* (1687), de Isaac Newton. (AABOE 1984, p. 57-58; FRIEDELL 1931, p. 457; RUSSELL , p. 572, 36-37.)

Euclides classificou as proposições primitivas em dois tipos: os axiomas, que são juízos concernentes a qualquer espécie de grandeza (como "o todo é maior que qualquer de suas partes") e os postulados, que são juízos cujo veracidade é proposta (como "dois pontos quaisquer se podem ligar por um segmento de reta"). Comenta Jean Dieudonné: “É de uso corente hoje fazer agrupar essas ‘hipóteses’ sob o nome de *axiomas* da geometria; isto parece-me um erro, já que não se reportam todas aos mesmos objetos. Euclides já está consciente disso, pois as divide em ‘petições de princípios’ e em ‘noções comuns’. As ‘petições de princípios’ – também denominados ‘postulados’ - são propriedades da geometria do plano, ao passo que as ‘noções comuns’ – que no fim da Antiguidade se chamarão ‘axiomas’ - dizem respeito a qualquer espécie de ‘grandeza’.” (DIEUDONNÉ 1990, p. 51. Para um outro tratamento desse tema, veja-se BONOLA 1955, p. 18-19.)

Tornou-se particularmente célebre o quinto postulado, posteriormente apelidado *postulado das paralelas*, que admite o seguinte enunciado: “Se uma reta, ao intersecar duas outras retas, formar, em um mesmo semiplano, ângulos internos menores que ângulos retos, então, sendo prolongadas indefinidamente, essas duas outras retas se encontrarão no semiplano considerado.” (Cf. AABOE 1984, p. 58.)

Parece que Euclides tinha plena consciência de uma característica que, posteriormente, foi denominada *independência entre as proposições primitivas*, pois as usou com magistral habilidade. A crítica contemporânea acentua que Euclides "não usou o postulado das paralelas até atingir a demonstração da proposição vigésima nona, a qual afirma que, quando duas retas paralelas são cortadas por uma terceira, então os ângulos interiores do mesmo lado são iguais a dois ângulos retos. [...] Ele tinha tido uma ocasião tentadora para usar o quinto postulado, imediatamente após a proposição décima sétima e, se o houvesse feito, teria encurtado e mesmo tornado mais penetrantes muitos dos raciocínios posteriores. Fica assim claro que o adiamento é deliberado e que Euclides decidiu demonstrar o máximo possível sem usar o postulado das paralelas, embora isso significasse progresso mais lento. Temos aqui, por um lado, testemunho de seus sentimentos especiais sobre o postulado das paralelas e, por outro lado, nosso primeiro exemplo de sua devoção ao princípio da economia dos recursos" (AABOE 1984, p. 63-64).

Mas os sucessores de Euclides duvidaram de que o quinto postulado fosse independente das demais proposições primitivas e, desde o século I a. C., tentaram demonstrá-lo mediante argumentos que repousavam na admissão (tácita ou expressa) de outros postulados. Segundo o comentador Proclo de Constantinópole (410-485 d. C.), o quinto postulado de Euclides "*deveria ser excluído da lista de postulados, por se tratar de um teorema que envolve muitas dúvidas, as quais Ptolemeu se propôs a resolver em um de seus livros; mas seus argumentos exigiam diversos postulados e teoremas*". Como a proposição que o antecede é o teorema: "São paralelas duas retas que, intersecadas por uma terceira, formam com esta ângulos alternos internos suplementares.", dominado pela perplexidade, Proclo se perguntava: *"Pode uma proposição ser um teorema e, simultaneamente, pode sua recíproca ser um postulado?"* (BONOLA 1955, p. 2-7; COOLIDGE 1940, p. 68)

Embora esse quinto postulado de Euclides se tenha constituído em motivo de permanente cogitação de vários matemáticos até a idade contemporânea, quando se inaugurou uma outra via na descrição do espaço, cabe lembrar que o próprio Euclides jamais reivindicou para seus postulados o grau de certeza que a tradição, ulteriormente, lhes predicou. De fato, "uma longa habituação parece ter enfraquecido nos geômetras a consciência da coragem que representa a passagem do mundo dos objetos sensíveis ao dos inteligíveis. Enquanto essa consciência é muito visível em Platão e Aristóteles, ficamos surpreendidos por ver pensadores tão profundos como Descartes e Pascal — esses que não hesitam em atacar de frente a escolástica — proclamarem vigorosamente a 'verdade evidente' dos axiomas da geometria. Exprimem apenas um estado de espírito comum a todos os matemáticos do seu tempo ..." (DIEUDONNÉ 1990, p. 53.).

Em carta de 8 de novembro de 1824, Karl Gauss declarava haver refletido, por trinta anos, acerca de uma hipótese incompatível com o quinto postulado de Euclides, a hipótese de que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja menor que um ângulo raso. Acrescentou não haver encontrado contradição alguma no sistema geométrico assim construído, o qual referiu como *geometria não-euclidiana*, mas pediu que essa missiva fosse considerada comunicação privada, não contribuindo, portanto, para o progresso nessa ordem de idéias. (Posteriormente, Felix Klein designou essa nova concepção como geometria hiperbólica, contrapondo-a à concepção de Euclides, a que chamou geometria parabólica.) (BARBOSA 1995, p. 39; HILBERT 1952, p. 238, 243; SOMMERVILLE 1958, p. 25.)

A nova concepção geométrica foi apresentada, primeiramente em 1829, por Nikolai Lobachevski, seguido de Janos Bolyai, que, em 1832, a propôs em apêndice a um livro de seu pai. É surpreendente que Lobachevski não se houvesse asfixiado em uma atmosfera impregnada das teses de Kant e que houvesse escrito, no prefácio a seus *Novos Princípios da Geometria* (p. 61), que:

> "Em a natureza, temos cognição, propriamente, apenas do movimento, sem o qual são impossíveis as impressões sensoriais. Portanto, todos os conceitos restantes, como os geométricos, são criações artificiais de nossa mente, tiradas das propriedades do movimento; eis porque o espaço em si, tomado separadamente, não existe para nós. Por isso, não poderá haver contradição alguma em nossa mente, se supusermos que tais forças naturais obedecem a uma geometria e que outras seguem uma outra geometria."

Como a intuição geométrica constitui o senso comum dos geômetras, é fácil compreender que, após dois milênios de domínio cultural quase exclusivo do modelo euclidiano, a comunidade reagisse com suspeita diante da nova concepção geométrica. Por isso, a obra de Lobachevski, que somente se tornou conhecida em 1840, através de um opúsculo que ele redigiu em língua alemã, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, enfrentou a oposição de pensadores eminentes, como o físico Ludwig Boltzmann, criador da mecânica estatística. (BARBOSA 1995, p. 42-44; KAGÁN 1986, p. 144, 372.)

O surgimento de uma concepção geométrica que não gozava de suporte intuitivo suscitou *a questão da consistência* do correspondente sistema de axiomas. Notemos que, até então, o sistema de axiomas euclidianos nunca fora contestado, no que tange à consistência. A dúvida que inquietara alguns pensadores era pertinente à independência das proposições, isto é, à impossibilidade de se obter o quinto postulado por inferência. Tal era a certeza atribuída à concepção euclidiana, que Kant erigiu um sistema fundamentado nela. A situação era dramaticamente distinta com a geometria hiperbólica, para a qual ainda não se havia construído culturalmente a correspondente intuição. Por isso, a lógica constituía o único instrumento disponível para dissipar a dúvida perante as idéias novas.

Ora, foi tentando comprovar a independência do postulado das paralelas que Bolyai construiu a sua formulação da geometria hiperbólica. Com efeito, ao contrário de seus antecessores, Bolyai tentou resolver a questão pelo método da redução ao absurdo. Começou a extrair proposições do sistema formado pela negação do postulado das paralelas e pelos demais postulados euclidianos. Porém, não encontrando contradição alguma, convenceu-se de que o sistema assim construído seria consistente e publicou os resultados obtidos como a ciência absoluta do espaço: *Scientiam spatii absolute veram exhibens*.

Era, porém, legítima a inquietação de que sofria a comunidade matemática. O fato de que não se houvesse encontrado contradição alguma na geometria hiperbólica não assegurava a consistência do sistema, pois tal contradição poderia ocorrer futuramente. (Compare-se com o recente critério de falseabilidade, proposto por Popper.) A dúvida somente foi dirimida em 1868, quando Eugenio Beltrami publicou um artigo, no qual apresentou um modelo de uma superfície (de curvatura negativa), cujas geodésicas se comportavam como as retas descritas por Lobachevski e Bolyai. Foi o seu tradutor francês, J. Hoüel, quem afirmou, em 1870, que assim se demonstrava a consistência da geometria hiperbólica, já que ela admitia um modelo euclidiano. (KAGÁN, p. 320-321; SOMMERVILLE 1958, p. 202.)

Na verdade, o problema da consistência fora apenas deslocado da geometria hiperbólica para a geometria parabólica, pois a qualquer contradição na geometria hiperbólica corresponderia uma contradição na geometria euclidiana. Surgiu, assim, um novo problema, o da consistência da geometria euclidiana, o qual se pode resumir nas palavras atribuídas a Henri Poincaré: “Para preservar dos lobos um rebanho de ovelhas, não é suficiente encerrá-las no redil. É necessário antes verificar que no redil não se encontra lobo algum.” (BABINI 1974, p. 59)

Uma primeira solução foi encontrada por Moritz Pasch, em 1882, que, nas suas *Vorlesungen über neuere Geometrie*, deu formulação satisfatória à geometria euclidiana, mediante a escolha cuidadosa dos conceitos e dos juízos primitivos. (MOSTERÍN 1987, p. 119; SOMMERVILLE 1958, p. 192-193.)

Mas 1882 foi o ano no qual Richard Dedekind convenceu a Georg Cantor de que a teoria dos conjuntos constituía uma fundação da matemática e no qual finalmente Leopold Kronecker publicou seus *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Groszen*. E isso nos leva a outra vertente. (EDWARDS 1992, p. 19; FERREIRÓS 1993, p. 353.)

4 - O construtivismo e o intuicionismo.

> "Passou-se muito tempo até que o método de redução ao absurdo se impusesse como forma legítima de raciocínio, sobretudo pela circunstância de não se afigurar possível, para se demonstrarem certos enunciados geométricos, proceder-se de modo direto. No entanto, sempre que podia, o matemático grego substituía as demonstrações indiretas pelas diretas (preferindo, dentre estas, aquelas que possuíam certo caráter construtivo).” (COSTA 1994, p. 76)

Ao invés de apontar a origem do construtivismo, é mais adequado esclarecer que, desde a Antiguidade, se privilegia a construção como método em matemática. Aliás, os três problemas propostos pelo espírito helênico (a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo e a quadratura de um círculo) envolviam a construção com régua e compasso, método esse inaugurado, ao que parece, por Apolônio de Perga (STRUIK 1967, p. 40, 56- 57; EVES 1997, p. 133-141).

O aspecto construtivo da matemática era tão conspícuo, que Immanuel Kant, na sua *Doutrina Transcendental do Método*, recorreu ao conceito de *construção* para distinguir entre a filosofia e a matemática: filosofia é a argumentação a partir de conceitos; matemática é a argumentação a partir da *construção* de conceitos (WINTERBOURNE 1981, p. 34). Ou, na exposição de SILVA (1989, p. 40): "o conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos; o conhecimento matemático, por construção de conceitos."

Assim, até recentemente, quase todas as demonstrações que se usavam em matemática eram construtivas e a existência de uma objeto matemático era compreendida como a possibilidade de exibi-lo. Talvez se possa apontar 1871 como o ano no qual um outro tratamento começou a impor-se. Esse foi o ano no qual Richard Dedekind publicou o Suplemento X à segunda edição da *Zahlentheorie* de Dirichlet. Esse tratamento, ao qual chamarei *sistemático* (do grego *sýstema, systêmatos* = conjunto) em oposição ao tratamento *construtivo*, foi inaugurado por Dedekind, ao definir o conceito de *ideal* como um sistema de inteiros algébricos que atendiam a certas condições. Mediante o tratamento sistemático, Dedekind preferia enfatizar propriedades fundamentais dos objetos matemáticos, em oposição às suas representações particulares, no que não pode absolutamente ser censurado. Mas, em assim, procedendo, introduziu subrepticiamente (*no bom sentido*) o infinito atual, até então proscrito da matemática. (EDWARDS 1980, p. 346-347.)

De acordo com EDWARDS (1983, p. 10-11), essa concepção de Dedekind foi haurida em duas fontes: A primeira fonte foi o “segundo princípio de Dirichlet”, segundo o qual os problemas devem ser resolvidos com o mínimo de computação cega e o máximo de pensamento perceptivo. A segunda fonte foi o estilo de Bernhard Riemann, ao qual o próprio Dedekind se refere em carta de 1876 destinada a Rudolf Lipschitz:

“O desígnio de meus esforços na teoria dos números foi basear o trabalho, não em representações ou expressões arbitrárias mas em conceitos fundamentais simples e, dessa forma – embora a comparação possa soar um tanto pomposa – obter, na teoria dos números, resultados análogos aos que Riemann alcançou na teoria das funções. E, ao falar nessa teoria, não posso deixar de apontar que os princípios de Riemann não estão recebendo aceitação significativa da maior parte dos autores — mesmo nos mais novos trabalhos sobre funções elípticas."

Talvez esse último reparo de Dedekind seja endereçado a Leopold Kronecker que produziu uma longa série de artigos sobre as funções elípticas (cf. EDWARDS 1987, p. 30). Kronecker professava conscientemente a doutrina de que cada definição fosse formulada de tal modo, que pudéssemos verificar, em um número finito de passos, se ela se aplicaria a uma dada grandeza; e de que seria completamente rigorosa uma prova de existência de uma grandeza, quando se indicasse um procedimento mediante o qual essa grandeza pudesse ser encontrado em ato, isto é, construtivamente. (EDWARDS 1987, p. 31.)

Referindo-se aos autores contemporâneos que não comungavam de sua tese, Kronecker desabafou: "Se ainda me restarem tempo e vigor, hei de mostrar à comunidade matemática que a aritmética pode ser a guia, e certamente a mais rigorosa, não apenas da geometria mas também da análise. Se eu não puder fazê-lo, fá-lo-ão meus sucessores ... e também eles reconhecerão a falsidade de *todas* as conclusões com que, presentemente, opera a *assim denominada* análise." (EDWARDS 1987, p. 32.)

Em 1890, Georg Cantor fundou a Deutsche Mathematiker-Vereinigung, convidando Kronecker a proferir a palestra inaugural do primeiro encontro, em setembro de 1891. Mas Kronecker, adoentado, não compareceu ao encontro, falecendo pouco depois (em dezembro), sem concluir a missão a que se havia devotado (O'CONNOR & ROBERTSON, verbete *Cantor*; EDWARDS 1987, p. 30).

A essa altura, a teoria dos conjuntos já encontrava menor resistência, embora Henri Poincaré, o mais eminente matemático dessa fase (e talvez um dos seis mais fecundos de todos os tempos), mantivesse certa reserva perante os procedimentos sistemáticos. Poincaré insiste em que, para dirimir os paradoxos, "l'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini des mots". (POINCARÉ 1908, p. 939.)

Contudo, um outro ponto de dissenso foi o axioma da escolha, que Zermelo usara na prova de que todo conjunto não vazio é bem ordenado. Por volta de 1905, na França, opunham-se ao axioma da escolha Émile Borel, René Baire e Henri Lebesgue, enquanto Jacques Hadamard o admitia. (Cf. BAIRE et alii 1905, p. 261-273.)

Esse clima foi propício à composição por Luitzen Brouwer de uma tese, *Over de Grondslagen der Wiskunde* [dos fundamentos da matemática], em 1907, na qual defendeu um tipo específico de construtivismo, denominado *intuicionismo*, por atribuir o papel fundador a um ato primeiro de intuição do tempo, tomando como referência os citados Borel, Baire e Lebesgue (LARGEAULT 1992b, p. 29). Embora se reconheça ser a querela entre intuicionistas e formalistas, no século vinte, a continuação da psicomaquia entre

Kronecker e a escola de Weierstrasz e Dedekind (cf. EVES 1997, p. 616; STRUIK 1967, p. 161), o próprio Brouwer, em suas notas históricas, jamais referiu Kronecker. Aliás comenta LARGEAULT (1992a, p. 533): "Après avoir décrit l'intuitionisme avec quelque distance, en troisième personne et comme si c'était l'affaire des autres, notamment de l'école française (Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue ...), il prend à son compte des thèse plus radicales, par exemple sur la séparation des mathématiques d'avec le langage chargé d'en décrire les constructions, par quoi il s'oppose aux logicistes et aux formalistes réunis."

Autor de trabalhos de primeira ordem em topologia algébrica, Brouwer consagrou a maior parte de sua atividade a reformar a matemática, consoante os princípios que defendia. Um desses princípios consiste em só admitir a existência de um objeto matemático que se possa construir. (Cf. DIEUDONNÉ 1990, p. 244; ALEXANDROV, p. 259.)

Brouwer recusou a precedência à axiomática, afirmando serem os axiomas ilusivos, pois somente são enunciados, após a construção de uma teoria; e são escolhidos, de modo que sobre eles se apóie uma cadeia de deduções; são apenas o registro das invenções e não revelam como surgem os objetos matemáticos. (LARGEAULT 1992b, p. 31).

Brouwer também recusou a precedência à lógica, pois a lógica, ao invés de anteceder a matemática, provém dessa disciplina. Ainda mais, a lógica não constitui um caráter intrínseco da matemática e os seus princípios, a suas leis ou as suas regras apenas descrevem regularidades observadas não na matemática mas na linguagem que a exprime. (LARGEAULT 1992b, p. 31).

De fato, a lógica tradicional, ainda que expressa em forma simbólica, nasceu da consideração de conjuntos finitos, não podendo ser aplicada, imprudentemente, a conjuntos potencialmente infinitos. Por isso, Brouwer rejeitou o princípio da exclusão do terceiro, não por considerá-lo falso mas muito mal instituído. Conseqüentemente, repudiou os argumentos por redução ao absurdo (*modus tollens*). Cabe citar que A. Heyting desenvolveu uma lógica que retratasse a atividade matemática segundo a concepção de Brouwer. Trata-se de uma lógica bivalente não-aristotélica, que não se deve confundir com as lógicas plurivalentes. (COSTA 1992, p. 35-36; EVES 1997, p. 672.)

Finalmente, segundo Brouwer, "o matemático não descobre as entidades matemáticas; é o próprio matemático quem cria as entidades que estuda, ou seja, a expressão 'A existe' só pode significar, em matemática, 'A foi construído pela inteligência humana', a qual, portanto, cria e dá forma aos entes matemáticos." (COSTA 1992, p. 36) Aliás, uma das teses mestras do intuicionismo é que não se pode destacar a pesquisa dos fundamentos da matemática de considerações acerca das condições sob as quais ocorre a atividade espiritual própria dos matemáticos. (BETH 1955, p. 150.)

Mais recentemente, o interesse por "les notions plus ou moins intuitives d'une loi de construction, d'un algorithme, d'un processus effectif" (cf. BETH 1955, p. 75 e 173) foi intensamente revigorado pela sua aplicabilidade à teoria da computação, que trata desse tema no capítulo sobre as funções recursivas (cf. BARROW 1994, p. 248-249). Aliás, foi o exame da possibilidade de se produzirem dispositivos lógicos que efetuem cálculos de acordo com um algoritmo que conduziu à máquina de Turing, que esteve presente na gênese das ciências cognitivas (cf. PENROSE 1991, passim; GARDNER 1995, passim). Dessa forma, presentemente, a necessidade de se fatorarem polinômios com coeficientes inteiros está levando os cientistas da computação à leitura dos *Grundzüge* de Kronecker (EDWARDS 1987, p. 35).

Embora negue que encontre eco na comunidade matemática "o desejo de proselitismo de certos construtivistas”, DIEUDONNÉ (1990, p. 234, 245) reconhece que "a maior parte dos matemáticos prefere as provas de existência construtivas, que dão muitas vezes informações mais rigorosas sobre os objectos construídos; mas resignam-se a ficar com provas não construtivas, quando não há outras."

Essa notícia sobre o construtivismo é mais defeituosa que a resenha sobre o logicismo, pois diversos pensadores laboram ancorados, não explicitamente, em alguma das teses apresentadas por Brouwer, sem que partilhem integralmente de seu projeto. SILVA (1989, p. 5) esclarece que:

> “Alguns construtivistas não concordam entre si quanto ao que de fato se pode admitir como existente em matemática, quando não no próprio sentido dessa palavra. Uns admitem como existente apenas o que se pode *efetivamente* representar na intuição pura (intuicionistas), outros o que se pode *descrever* numa certa linguagem dada numa intuição originária (Weyl), onde o conceito de intuição não é certamente o mesmo. Aqueles fazem referência à intuição kantiana do tempo, estes à intuição husserliana. Outros ainda, os predicativistas (logo construtivistas de alguma forma), adotam uma noção formalista de existência (Poincaré).”

Embora, tanto quanto eu saiba, não se tenha declarado construtivista, o lógico Alonzo Church emite uma opinião que o aproxima das teses de Brouwer: “[...] pode haver, e realmente há, mais de uma geometria capaz de descrever o espaço físico. Analogamente existe, sem nenhuma dúvida, mais de uma lógica útil e, de todas elas, uma pode ser mais agradável ou mais conveniente, mas não se pode dizer que esta seja certa e aquela errada”. (Apud EVES 1997, p. 671.)

5 - O formalismo e o estruturalismo

Se quisermos datar o nascimento do formalismo, a escolha mais adequada recairá sobre o ano 1899, no qual David Hilbert publicou seus *Grundlagen der Geometrie*.

Por essa época, já se reconheciam três atributos dos sistemas axiomáticos:

a) A independência – Nenhum dos postulados que compõem o sistema decorre dos outros. Equivalentemente, nenhuma das proposições que figuram como postulado é um teorema no sistema constituído dos demais postulados. Historicamente, essa foi a primeira característica estudada. Lembremo-nos de que Bolyai construiu o seu sistema geométrico, quando tentou mostrar, por redução ao absurdo, a independência do postulado das paralelas. Talvez o método mais eficaz de se demonstrar a independência de uma proposição relativamente a um sistema consista em se exibir um modelo que não atenda à proposição vertente mas que satisfaça a todas as demais.

b) A consistência – Dois quaisquer postulados que integrem o sistema são compatíveis. Equivalentemente, é impossível extrair dois teoremas que se contradigam. Lembremo-nos de que o quesito da consistência foi aduzido pela invenção da geometria hiperbólica e se tornou crucial, quando Beltrami apresentou uma modelo euclidiano do plano hiperbólico.

c) A plenitude – O estudo da independência aventou o problema complementar, que se pode formular na indagação: Se nada está sobrando, estará faltando algo? Equivalentemente, haverá sido admitida tacitamente alguma hipótese ? Pasch verificou que, na composição de seus *Elementos*, Euclides recorrera implicitamente a um postulado que nunca fora enunciado e o incluiu em suas *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Presentemente, esse postulado é denominado *axioma de Pasch.*

Assim, Hilbert atendeu a essas exigências axiomáticas na composição de seus *Grundlagen*. Mas mudou de perspectiva, ao tomar como conceito estruturante de sua obra ***a definição implícita***. Esse modo de definir, que já fora usado por Joseph Gergonne (1819) consiste em se considerar que as noções primitivas do sistema vertente se definem pela rede de significados admissíveis. Assim, ao invés de supormos que as noções de ponto e de reta não precisam ser definidas, porque já temos delas as intuições correpondentes, aceitamos como ponto e reta qualquer objeto que satisfaça aos postulados que compõem o sistema. Dessa forma, ao instaurar o uso das definições implícitas, Hilbert esvaziou as noções primitivas de qualquer conteúdo conceitual que não estivesse implicado pelos axiomas. (BETH 1955, p. 28, 115; NAGEL & NEWMAN, 1958, p. 12-13.)

Ora, Frege, que havia examinado o método axiomático com mais penetração que qualquer de seus antecessores, constituindo o seu trabalho a culminância de uma tradição que remonta a Aristóteles, não percebeu a mudança de perspectiva. De fato, para Frege a axiomática constituía um método puramente sintático, não envolvendo, portanto, quesitos semânticos. Da perspectiva de Frege, igual à de Aristóteles, os conceitos primitivos dispensam definição, por serem intuivamente conhecidos e os primeiros princípios prescindem de demonstração, pois sua veracidade é evidente e a captamos por intuição" Por isso, Frege iniciou uma breve polêmica epistolar com Hilbert, comparando a pluralidade de interpretações admitidas pelo sistema de Hilbert com a multiplicidade de soluções admitidas por um sistema de equações lineares, constituindo-se assim em precursor de Tarski na concepção de modelo. O principal efeito dessa polêmica foi coagir Hilbert a precisar a sua posição. (MOSTERÍN 1987, p. 115-116, 121-122.)

Hilbert respondeu-lhe que cada teoria consiste apenas em um esquema de conceitos interligados por relações necessárias entre eles; e que esses conceitos podem ser arbitrariamente interpretados. Se entendemos por ponto e reta qualquer sistema de coisas, como o amor e a lei, e verificamos que nossos axiomas são válidos para essas coisas, então tmabém serão válidos para elas os nossos teoremas, como o teorema de Pitágoras. Em outras palavras, cada teoria pode aplicar-se a uma infinidade de sistemas de elementos básicos. (MOSTERÍN 1987, p. 119-120.)

Essa concepção suscitou o famoso comentário jocoso de Russell: “Pure mathematics is the subject in which we do not know what we are talking about or whether what we are saying is true.” (NAGEL & NEWMAN 1958, p. 13.)

Perturbado com a crítica de Brouwer e com a defecção de matemáticos eminentes, como Hermann Weyl, Hilbert empreendeu a tarefa de axiomatizar toda a matemática. Com fina ironia, Poincaré referiu esse empreendimento, no IV Congresso Internacional dos Matemáticos (Roma, 6 a 11 de abril de 1908): “On s’est efforcé, d’autre part, d’énunérer les axiomes et les postulats plus ou moins dissimulés qui servent de fondement aux diverses théories mathématiques. Monsieur Hilbert a obtenu les résultats les plus brillants. Il semble d’abord que ce domaine soit bien limité et qu’il n’y ait plus rien à y faire, quand l’inventaire sera terminé, ce qui ne saurait tarder. Mais, quand on aura tout énuméré, il y aura bien des manières de tout classer; un bon bibliothécaire trouve toujours à s’occuper, et chaque classification nouvelle sera instructive pour le philosophe.” (POINCARÉ 1908, p. 939.)

Coadjuvado por Wilhelm Ackermann e Paul Bernays, Hilbert enfrentou os dois quesitos restantes da axiomática: a categoricidade e a saturação.

Dizemos que um sistema de axiomas é categórico, quando todos os seus modelos forem isomorfos, em uma acepção que será definida para cada categoria. Esse quesito é tratado, presentemente, no âmbito da lógica de segunda ordem. (BETH 1955, p. 23, 101, 152; WEYL 1949, p. 25.)

Dizemos que um sistema de axiomas é saturado, quando toda proposição, enunciada nos termos da teoria vertente, for um teorema dessa teoria (e, portanto, demonstrável com apoio nesse sistema) ou for refutável (isto é, incompatível com teoremas dessa teoria). (BETH 1955, p. 71-73; WEYL 1949, p. 24.)

Em 1928, Hilbert e Ackermann publicaram os *Grundzüge der theoretischen Logik*; entre 1934-1939, Hilbert e Bernays publicaram os *Grundlagen der Mathematik*. O programa de Hilbert, no que tange à consistência, apresenta dois aspectos: a prova de consistência relativa e a prova de consistência basoluta. A prova da consistência relativa foi sugerida historicamente pelo caso da geometria hiperbólica, cuja consistência fora demonstrada por Beltrami, ao lhe propor um modelo euclidiano. Assim, Hilbert forneceu a prova da consistência da geometria euclidiana, apresentando-lhe um modelo aritmético: o espaço dos ternos ordenados de números reais. Assim, a geometria euclidiana será consistente, se o for a aritmética. Mas a consistência relativa não pode aplicar-se indefinidamente. No exemplo descrito, será necessário elaborar uma prova absoluta de consistência da aritmética. E ele constrói uma teoria da demonstração, baseada em dois princípios: princípio de recorrência sobre a construção da expressão e princípio da recorrência sobre a derivação do teorema. (BETH 1955, p. 40-41; COSTA 1992, p. 53-55.)

Em 1931, porém, Kurt Gödel produziu um artigo, relativamente breve, intitulado *“Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme*” [das proposições formalmente indecidíveis dos *Principia Mathematica* e de sistemas similares]. Nesse artigo, o autor provou, entre outras coisas, que em qualquer axiomatização da aritmética haverá proposições evidentemente verdadeiras mas que não admitem prova dentro dessa axiomatização. O projeto de Hilbert é, portanto, inexeqüível. (NAGEL & NEWMAN 1958, p. 98; WEYL 1949, p. 219.)

Independentemente desse malogro lógico, diversos matemáticos rejeitam o uso de axiomas destituídos de sentido. No XVII Congresso Internacional de Filosofia das Ciências (Paris, 1949), Arnauld Denjoy reafirmou “qu’il n’y a point d’axiomes sans une substance mathématique antérieure à axiomatiser”. (Apud LARGEAULT 1992a, p. 538.)

Mais recentemente, o formalismo se refugiou sob o teto do estruturalismo, uma vertente iniciada por Évariste Galois que, em 1832, explicara a fatoração de polinômios, instituindo uma correspondência entre os subgrupos normais de certa classe de grupos de automorfismos de um corpo e as extensões normais de um certo subcorpo. Citam-se como os primeiros sucessores notáveis de Galois o já citado Leopold Kronecker e também Felix Klein, o qual recorrera à noção de grupo para classificar as geometrias então conhecidas (1872). Cabe esclarecer que a corrente estruturalista jamais teve vocação fundacional, sendo seu único escopo aguçar a percepção dos fatos, olhando-os de uma perspectiva que privilegiasse as estruturas envolvidas. Sob esse aspecto, o mais notável expoente do estruturalismo foi Nicolas Bourbaki, matemático policéfalo que, desde 1935, vem desenvolvendo o labor de apresentar toda a matemática sob a óptica estrutural ou, em suas próprias palavras:

> "My efforts during the last fifteen years [...] have been directed wholly towards a unified exposition of the basic branches of mathematics, resting on as solid foundations as I could hope to provide." (BOURBAKI 1949, p. 1.)

O parentesco entre o formalismo e o estruturalismo evidencia-se nos três aspectos que RECK & PRICE (2000, p. 341-342) vêem no núcleo do estruturalismo:

a) A tarefa primordial da matemática é a investigação das estruturas.

b) A investigação das estruturas efetua-se por abstração da natureza dos objetos envolvidos.

c) As propriedas intrínsecas dos objetos matemáticos exprimem-se através das estruturas subjacentes.

De qualquer forma, toda a história ainda não foi escrita. Em um artigo recente, está cabalmente documentado, mediante citações de Hilbert e de Kronecker, que, embora discorde do aspecto filosófico do dogmatismo kroneckeriano, Hilbert considerou o trabalho de Kronecker como modelo da *prática matemática* (GAUTHIER 1994, p. 2.). Mas essa consideração por Hilbert nos conduz ao domínio do pragmatismo.

5 - O pragmatismo

Sem pretender efetuar a contraposição entre o pragmaticismo e outras formas de pragmatismo (cf. PEIRCE 1905), lembrarei que a atitude pragmática perante o quesito gnoseológico consiste em julgar uma crença por suas conseqüências. Dessa forma, o conhecimento se confunde com um conjunto de crenças que promovem o bom êxito, podendo interpretar-se esse bom êxito também em sentido biológico, como o faria John Dewey (cf. RUSSELL 1948, p. 156). Nessa acepção suficientemente lata, poderemos identificar essa atitude pragmática em várias instâncias da evolução da matemática.

Contrariando o hábito de remontar à Grécia, recuemos ao Egito antigo, onde encontraremos um conhecimento matemático talvez ainda não completamente diferenciado das técnicas de construção mas que permitiu a edificação das portentosas pirâmides, testemunhas eloqüentes e duradouras de que a eficácia pode prescindir de fundação em princípios e repousar na excelência de seus efeitos. Atualmente, os documentos mais abrangentes para a pesquisa da matemática egípcia, que são o papiro Rhind (manual de cálculo do escriba Ahmès) e o papiro de Moscovo, consignam regras para calcular a área de triângulos, de quadriláteros, do disco e do hemisfério; e o volume do cubo, do paralelepípedo, do tronco de cilindro circular e do tronco de pirâmide de base quadrangular. Admite-se que tais regras tenham sido formuladas como, posteriormente, o foram muitas leis físicas. (COOLIDGE 1940, p. 9-13; GERMAIN 1962, p. 228; GODEAUX 1960, p. 9-10; STRUIK 1967, p. 24)

Já foi apontado, na introdução do presente ensaio, que a fase de fundamentação do cálculo infinitesimal fora precedida de uma fase inventiva, na qual a técnica elaborada se legitimava pelos dados que produzia. E isso não foi uma exceção. No dizer de Brouwer, os axiomas são sempre precedidos de uma investigação da natureza: “Ils ne sont pas la réalité première, on les trouve après coup; une fois la nature capturée par hasard, nous nous mettons à chercher des axiomes dans le système déjà construit.” (Apud LARGEAULT 1992a, p. 538.)

Também na invenção da geometria hiperbólica parece haver desempenhado papel dominante a atitude pragmática. De fato, Lobachevski procura um sistema geométrico que se coadune com as observações físicas, isto, um sistema geométrico que forneça resultados compatíveis com os resultados obtidos empiricamente. Um significativo exemplo que ele apresentou envolve uma força atrativa, concentrada em um ponto material, que se difunde em todas as direções. Por simetria, tal força distribuir-se-á uniformemente na superfície de uma esfera centrada no ponto considerado. Como [segundo a lei da gravitação] a intensidade dessa força é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre o ponto considerado e o ponto no qual a força esteja aplicada, a expressão que fornece a área da superfície esférica deve conter como fator o inverso do quadrado dessa distância. Acrescenta Lobachevski que, se fosse outra a lei física que regesse a intensidade das forças, teríamos que construir um sistema geométrico compatível com essa outra lei física. (Cf. LOBACHEVSKI 1955, p. 61-62.)

Um conceito cuja aceitação obedeceu, *avant la lettre*, aos cânones do pragmatismo foi a noção de número complexo. O método de resolução da equação de terceiro grau fora inventado por Scipione del Ferro (1515). Aplicado por Rafael Bombelli (1572) à equação $x^3 - 15x = 4$, forneceu a raiz 4 como a soma de parcelas expressas mediante a raiz quadrada de -1, induzindo-o a inferir que "só aparentemente as raízes são imaginárias". A mudança na atitude perante os números complexos evidenciou-se nas palavras de Albert Girard (1592-1623): "Podem perguntar-me por que adotar essas soluções impossíveis. Respondo-lhes que o fazemos por três motivos: por preservarem a validade das regras gerais, por sua utilidade e por inexistirem outras soluções." (CARVALHO 1992, p. 111; MILIES 1990, p. 6-7.)

Desde entao, os números complexos começaram a ser amplamente empregados, até mesmo por notáveis matemáticos que nutriam profundas reservas conceituais. Assim Gottfried Leibniz considerava que “o Espírito Divino se havia exprimido sublimemente nessa maravilha da análise, nesse portento do mundo das idéias, nesse anfíbio entre o ser e o não ser, a que chamamos raiz imáginária da unidade negativa." (Apud CARVALHO 1992, p. 109.) E Leonhard Euler afirmava em sua *Algebra* (1770): “desses números só podemos afirmar que não são iguais a zero, nem maiores que zero, nem menores que zero, o que necessariamente os torna imaginários ou impossíveis.” (MILIES 1990, p. 7)

Nesse episódio tão notável inspirou-se CROWE para formular a sua “terceira lei” atinente aos cânones de mudança na matemática: “Embora as exigências da lógica, da consistência e do rigor tenham, por vezes, instado pela rejeição de alguns conceitos hoje aceitos, a utilidade desses conceitos repetidamente forçou os matemáticos a aceitá-los e a tolerá-los, mesmo enfrentando fortes sentimentos de aflição.” (CROWE 1975.)

Bernard Bolzano, reconhecido precursor de todos os analistas, ofereceum em 1817, uma “prova puramente analítica” (*rein analytischer Beweis*) da existência de uma raiz de polinômios. Mas, conforme observa KITCHER (1975, p. 229-230), Bolzano não propõe essa nova prova por desconfiar das anteriores, fundada em argumentos geométricos: “Nada se tem por objetar quanto à veracidade ou à evidência desse teorema geométrico.” Em um escrito posterior, Bolzano distingue entre provas que dão certeza (*Gewiszmachungen*) e suas provas analíticas ideais (*Begründung*) e defende que a certeza de nosso conhecimento matemático repousa, em última instância, na riqueza de nossa experiência, a qual confirma a teoria matemática.

Os autores seguintes enxergaram matizes pragmáticos tanto no logicismo quanto no intuicionismo.

a) Segundo DELACAMPAGNE (1997, p. 44), o empreendimento logicista de Russell e Whitehead apresenta três falhas. A terceira falha reside em que a única resposta possível ao quesito da escolha das noções primitivas é a seguinte: Essa escolha justifica-se *a posteriori*, por permitir a reconstrução da aritmética e da análise.

b) Segundo COSTA (1992, p. 36), “Brouwer insiste em que a matemática não se compõe de verdades eternas, relativas a objetos intemporais, metafísicos, semelhantes às idéias platônicas. Em contraposição, com base em pressupostos pragmáticos, ele procura demonstrar que o saber matemático escapa a toda e qualquer caracterização simbólica e se forma em etapas sucessivas que não podem ser conhecidas de antemão.”

No ensaio “A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?”, o celebrado Lakatos assinala uma dúzia de autores contemporâneos que não estão satisfeitos com as tentativas de fundação esboçadas ou que apontam a experiência como legitimadora, *a posteriori*, das teorias construídas. (LAKATOS 1981, p. 42-66.) Anuncia, também, o fato, pouco divulgado, de que Bertrand Russell, já em 1924, havia abandonado o credo, anteriormente partilhado com o Círculo de Viena, de que a matemática se legitime *a priori*. Em 1924, Russell defendia que a lógica e a matemática, assim como as equações de Maxwell da eletrodinâmica, se aceitam, em virtude da veracidade de suas conseqüências observadas.

Surpreendentemente, Lakatos esquece de referir que o próprio Nicolas Bourbaki defendia uma visão pragmática da lógica e da matemática. Vejamos como se exprime Bourbaki:

> “In other words, logic, so far as we mathematicians are concerned, is no more and no less than the grammar of the language which we use, a language which had to exist before the grammar could be constructed. [...] Historical speaking, it is of course quite untrue that mathematics is free from contradiction; non-contradiction appears as a goal to be achieved, not as a God-given quality that has been granted us once for all. [...] Absence of contradiction, in mathematics as a whole or in any given branch of it, thus appears as an empirical fact, rather than as a metaphysical principle. The more a given branch has been developed, the less likely it becomes that contradictions may be met with in its further development. [...] What will be the working mathematician’s attitude when confronted with such dilemmas? It need not, I believe, be other than strictly empirical.” (BOURBAKI 1949, p. 1-3.)

RATNER (1992, p. 476) nota que Lakatos deveria também citar a relevância da abdução, do falibilismo e dos experimentos mentais de Peirce. Nesse ensaio, RATNER aponta a convergência entre as teses esposadas por John Dewey, na sua *Logic: the theory of inquiry* (1938) e as opiniões emitidas por alguns filósofos e alguns matemáticos contemporâneos acerca do tema de nossa discussão.

É instrutivo observar que o pragmatismo também inspira estudos contemporâneos sobre o construtivismo. Por exemplo, HELLMAN (1998) sustenta que a matemática construtivista seja inadequada à física do espaço-tempo, não podendo, portanto, constituir-se em alternativa à matemática clássica. Sua posição é contestada por BILLINGE (2000), a qual defende que a presente existência de resultados não construtivos na física não significa que não se possam formular alternativas construtivas adequadas. Notemos que ambos os interlocutores discutem o tema da validade da matemática construtivista, ancorados em *um mesmo critério pragmático de legitimação*: a aplicabilidade à física.

6 - Referências.

6.1 - Artigos.

BAIRE, René; BOREL, Émile; HADAMARD, Jacques; LEBESGUE, Henri (1905). *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 33, 261-273.

BILLINGE, Helen (2000). *Applied constructive mathematics*. British Journal for the philosophy of science, vol. 51, p. 299-318.

BOURBAKI, Nicolas (1949). *Foundations of mathematics for the working mathematician*. The Journal of Symbolic Logic, vol. 14, n. 1, p. 1-8.

CROWE, Michael J. (1975). *Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics*. Historia Mathematica, vol. 2, p. 161-166.

EDWARDS, Harold M. (1980). *The genesis of ideal theory*. Archive for History of Exact Sciences, vol. 23, p. 321-378.

EDWARDS, Harold M. (1983). *Dedekind's invention of ideals*. Bull. London Math. Soc., vol. 15, p. 8-17.

EDWARDS, Harold M. (1987). *An appreciation of Kronecker*. The mathematical intelligencer, vol. 9, n. 1, p. 28-35.

EDWARDS, Harold M. (1992). *Mathematical ideas, ideals, and ideology*. The mathematical intelligencer, vol. 14, n. 2, p. 6-19.

FERREIRÓS, José (1993). *On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*. Historia Matematica, vol. 20, p. 343-363.

GAUTHIER, Yvon (1994). *Hilbert and the internal logic of mathematics*. Synthese, vol. 101, p. 1-14.

HELLMAN, G. (1998). *Mathematical constructivism in spacetime*. British Journal for the philosophy of science, vol. 49, p. 425-450.

KITCHER, Philip (1975). *Bolzano's ideal of algebraic analysis*. Stud. Hist. Phil. Sci., vol. 6, n. 3, p. 229-269.

PEIRCE, Charles S. (1905). *What pragmatism is*. The Monist, 15:2 (April 1905), pp. 161-181.

POINCARÉ, Henri (1908). *L'avenir des mathématiques*. Revue générale des sciences pures et appliquées, vol. 19, 1908, p. 930-939, Paris.

RATNER, Sidney (1992). *John Dewey, empiricism, and experimentalism in the recent philosophy of mathematics*. Journal of the History of Ideas, 53 (3), p. 467-479.

RECK, Erich H.; PRICE, Michael P. (2000). *Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics*. Synthese, vol. 125, p. 341-383.

SIERKSMA, Gerard; SIERKSMA, Wybe (1999). *The great leap to the infinitely small. Johann Bernoulli, mathematician and philosopher*. Annals of Science 56, p. 433-449.

WINTERBOURNE, A. T. (1981). *Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics*. Stud. Hist. Phil. Sci., vol. 12, n. 1, p. 33-46.

6.2 - Livros.

AABOE, Asger (1984). *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

ALEXANDROV, P. S. (1973). *Topologia*. In: ALEXANDROV, A. D. et alii (1973), p. 231-266.

ALEXANDROV, A. D. et alii (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (três tomos). Madrid, Alianza Editorial.

BABINI, José (1974). *Historia de las ideas modernas en matemática*. Washington, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

BACHELARD, Gaston (1934). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris, Presses Universitaires de France.

BARBOSA, João Lucas Marques (1995). *Geometria hiperbólica*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

BARON, Margaret E. (1985a [1974]). *A matemática grega. Brasília*, Editora da UNB.

BARON, Margaret E. (1985b [1974]). *Indivisíveis e infinitésimos*. Brasília, Editora da UNB.

BARROW, John D. (1994 [1991]). *Teorias de tudo - A busca da explicação final*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

BETH, EWERT W. (1955). *Les fondements logiques des mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars.

BOCHENSKI, I. M. (1962 [1951]). *A filosofia contemporânea ocidental*. São Paulo, Editora Herder.

BOLYAI, János (1955 [1832]). *The science absolute of space*. In: BONOLA 1955, p. 1-71.

BONOLA, Roberto (1955 [1911]). *Non-Euclidean geometry*. New York, Dover Publications.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. (1992). *Trigonometria - Números complexos*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

CARVALHO, Joao Bosco Pitombeira de (1992). *A história dos números complexos*. In: CARMO et alii (1992), p. 109-114.

CHILOV, Georges (1973a). *Analyse mathématique - fonctions d'une variable*, tomo I. Moscou, Éditions Mir.

CHILOV, Georges (1973b). *Analyse mathématique - fonctions d'une variable*, tomo II. Moscou, Éditions Mir.

COOLIDGE, Julian Lowell (1940). *A history of geometric methods*. Oxford, Clarendon Press.

COSTA, Newton Carneiro Afonso da (1992). *Introdução dos fundamentos da matemática*. São Paulo, HUCITEC.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuber (1985 [1982]). *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves.

DELACHET, André (1949). *L'analyse mathématique*. Paris, Presses Universitaires de France.

DELACAMPAGNE, Christian 1997 [1995]). *História da filosofia no século XX*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

DESANTI, Jean (1962). *De Cauchy à Riemann, ou la naissance de la théorie des fonctions de variable réelles*. In: LE LIONNAIS 1962, p. 179-187.

DIEUDONNÉ, Jean (1990 [1987]). *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

EVES, Howard (1997 [1990]). *Introdução à história da matemática*. Campinas, Editora da UNICAMP.

FEYS, Robert (1993 [1963]). *Lógica*. In: HEINEMANN 1993, p. 301-320.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de (1977). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

FRAENKEL, Abraham A. (1993 [1963]). *Filosofia da Matemática*. In: HEINEMANN 1993, p. 321-344.

FRIEDELL, Egon (1931). *Kulturgeschichte der Neuzeit*. München, Verlag C. H. Beck.

GARDNER, Howard (1995 [1985]). *A nova ciência da mente*. São Paulo, EDUSP.

GERMAIN, Paul (1962). *Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques*. In: LE LIONNAIS (1962), p. 226-241.

GODEAUX, Lucien (1960). *Les géométries*. Paris, Armand Colin.

HEINEMANN, Fritz (1993 [1963]). *A filosofia no século XX*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. (1952 [1932]). *Geometry and the imagination*. New York, Chelsea.

KAGÁN, V. F. (1986). *Lobachevski*. Moscovo, Editorial Mir.

LAKATOS, Imre (1981 [1978]). *Matemáticas, ciencia y epistemologia*. Madrid, Alianza Editorial.

LARGEAULT, Jean (1992a). *Intuitionisme et théorie de la démonstration*. Paris, Vrin.

LARGEAULT, Jean (1992b). *L'intuitionisme*. Paris, Presses Universitaires de France.

LEIBNIZ, G. W. (1987 [1684]). *Análisis infinitesimal*. Madrid, Editorial Tecnos.

LE LIONNAIS, François (1962). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris, Albert Blanchard.

LAURIENTIEV, M. A.; NIKOLSKI, S. M. (1973). *Análisis*. in: ALEXANDROV 1973, tomo I, p. 91-224.

LOBACHEVSKI, Nikolay I. (1955 [1835-1838]). *Nuovi princípi della geometria*. Torino, Paolo Boringhieri.

LORENZO, Javier (1987). *Estudio preliminar*. In: LEIBNIZ, G. W. (1987), p. IX-LXXIX.

MILIES, Cesar Polcino (1990). *Breve introdução à história da teoria dos anéis*. São Paulo, XI Escola de Álgebra.

MOSTERÍN, Jesús (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. (1958) *Gödel's proof*. New York, University Press.

NIKOLSKI, S. M. (1973). *Aproximación de funciones*. In: ALEXANDROV 1973, tomo II, p. 311-354.

PASTOR, Julio Rey; CALLEJA, Pedro Pi; TREJO, César A. (1951). *Análisis matemático*, tomo I. Buenos Aires, Editorial Kapelusz.

PENROSE, Roger (1991 [1989]). *A mente nova do rei*. Rio de Janeiro, Editora Campus.

RONAN, Colin A. (1987 [1983]). *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

RUSSELL, Bertrand (1945). *A history of western philosophy*. New York, Simon and Schuster.

RUSSELL, Bertrand (1948). *Human knowledge, its scope and limits*. New York, Simon and Schuster.

SCHMIDT, Heinrich (1974). *Philosophisches Wörterbuch*. Stuttgart, Alfred Kroner Verlag.

SILVA, Jairo José da (1989). Sobre o predicativismo em Hermann Weyl. Campinas, Editora da UNICAMP, coleção CLE, v. 6.

SOMMERVILLE, D. M. Y. (1958 [1914]). *The principles of non-Euclidean geometry*. New York, Dover Publications.

STRUIK, Dirk J. (1967). *A concise history of mathematics*. New York, Dover Publications.

WEYL, Hermann (1949). *Philosophy of mathematics and natural science*. New York, Atheneum.

YAGLOM, Isaak Moiseevich (1979). *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. New York Springer Verlag.

7.3 - Sítio na rede mundial

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (1999). *History of Mathematics*. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history.)